



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θεωρία-Άλγεβρα 1^ο κεφάλαιο

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1.1 Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

- **Μεταβλητή** είναι ένα γράμμα (π.χ. x, y, t, \dots) που το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου.

Αλγεβρικές παραστάσεις - Αναγωγή ομοίων όρων

- Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται, **αριθμητική** παράσταση.
- Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική** παράσταση. Οι προσθετέοι λέγονται **όροι** αυτής.
- Η διαδικασία αυτή με την οποία γράφουμε σε απλούστερη μορφή τις αλγεβρικές παραστάσεις, ονομάζεται «**αναγωγή ομοίων όρων**».
(θυμηθείτε την επιμεριστική ιδιότητα : $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις παραστάσεις:

i. $2x + 5x = (2 + 5)x = 7x$

ii. $3\alpha + 4\alpha - 12\alpha = (3 + 4 - 12)\alpha = -5\alpha$

iii. $\omega + 3\omega + 5\omega + 7\omega = (1 + 3 + 5 + 7)\omega = 16\omega$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $4y + 3x - 2y + x = (3 + 1)x + (4 - 2)y = 4x + 2y$

ii. $y + 2\omega - 3y + 2 + \omega + 5 = (2 + 1)\omega + (1 - 3)y + 7 = 3\omega - 2y + 7$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2(x + 3) - 4(x - 1) - 8 \quad , \text{όταν } x = -0,45.$$

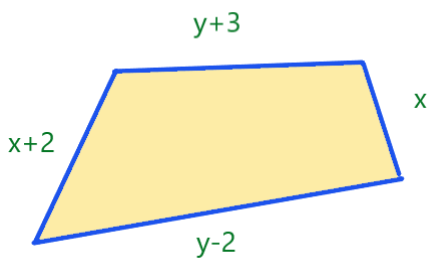
ΛΥΣΗ

$$A = 2x + 6 - 4x + 4 - 8 = -2x + 2 \underset{x=-0,45}{=} -2 \cdot (-0,45) + 2 =$$

$$= 0,9 + 2 = 2,9.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να υπολογίσετε την περίμετρο του παρακάτω τετραπλεύρου, όταν $x + y = 10$.



ΛΥΣΗ

Έστω Π η περίμετρος του τετραπλεύρου τότε :

$$\Pi = x + 2 + y - 2 + x + y + 3 = 2x + 2y + 3 = 2(x + y) + 3 =$$

$$\underset{x+y=10}{=} 2 \cdot 10 + 3 = 23.$$

1.2 Εξισώσεις α' βαθμού

Χρήσιμες ιδιότητες πράξεων

- Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα ,δηλαδή :

$$\text{Αν } \alpha = \beta \quad , \text{τότε } \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

- Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα ,δηλαδή :

$$\text{Αν } \alpha = \beta \quad , \text{τότε } \alpha - \gamma = \beta - \gamma$$

- Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα ,δηλαδή :

$$\text{Αν } \alpha = \beta \quad , \text{τότε } \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

- Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα ,δηλαδή :

$$\text{Αν } \alpha = \beta \quad , \text{τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \quad , \text{με } \gamma \neq 0$$

Η έννοια της εξίσωσης

Μια ισότητα που περιέχει έναν τουλάχιστον άγνωστο αριθμό x ,λέγεται **εξίσωση**.

- Σε μία εξίσωση την παράσταση αριστερά του " = " την ονομάζουμε **πρώτο μέλος** ,ενώ την παράσταση δεξιά του " = " την ονομάζουμε **δεύτερο μέλος**.
- Σε μία εξίσωση μπορούμε να **μεταφέρουμε** όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να λυθεί η εξίσωση: $2(x - 1) + 3(2 - x) = 4(x + 2)$.

ΛΥΣΗ

$$2x - 2 + 6 - 3x = 4x + 8 \Leftrightarrow 2x - 3x - 4x = 8 + 2 - 6 \Leftrightarrow -5x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{y+1}{2} + y = \frac{2y+3}{3} + 2$

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε **Ε.Κ.Π.(2,3)=6**

Πολλαπλασιάζουμε με το 6 και τα δύο μέλη της εξίσωσης, άρα θα έχουμε :

$$6 \cdot \frac{y+1}{2} + 6y = 6 \cdot \frac{2y+3}{3} + 6 \cdot 2 \Leftrightarrow 3(y+1) + 6y = 2(2y+3) + 12$$

$$\Leftrightarrow 3y + 3 + 6y = 4y + 6 + 12 \Leftrightarrow 3y + 6y - 4y = 6 + 12 - 3$$

$$\Leftrightarrow 5y = 15 \Leftrightarrow y = \frac{15}{5} \Leftrightarrow y = 3.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να λυθεί η εξίσωση : $2(3-x) + 4(x-1) = 2x + 5$

ΛΥΣΗ

$$6 - 2x + 4x - 4 = 2x + 5 \Leftrightarrow -2x + 4x - 2x = 5 - 6 + 4$$

$0x = 3$, σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να διαιρέσουμε με τον συντελεστή του αγνώστου γιατί ο συντελεστής του αγνώστου είναι το **0**, συνεπώς λέμε ότι η εξίσωση είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ**, δηλαδή δεν έχει λύση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{3}{5} - \frac{2x+1}{10} = \frac{5-2x}{10}$

ΛΥΣΗ

Ε.Κ.Π.(5, 10) = 10, άρα :

$$10 \cdot \frac{3}{5} - 10 \cdot \frac{2x+1}{10} = 10 \cdot \frac{5-2x}{10} \Leftrightarrow 2 \cdot 3 - (2x+1) = 5 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2x - 1 = 5 - 2x \Leftrightarrow -2x + 2x = 5 - 6 + 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0x = 0$, η οποία έχει λύση κάθε αριθμό, την οποία ονομάζουμε

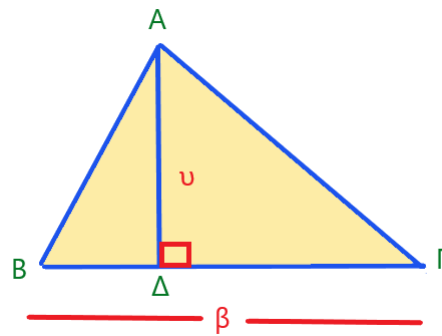
ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ.

1.3 Επίλυση Τύπων

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση β και ύψος $υ$, γνωρίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} \beta υ$.
Να λύσετε τον τύπο αυτόν ως προς β και ως προς $υ$.
Στη συνέχεια να βρείτε :

- Το ύψος ενός τριγώνου που έχει εμβαδόν 12 cm^2 και βάση 4 cm
- Τη βάση ενός τριγώνου που έχει εμβαδόν 35 cm^2 και ύψος 7 cm



ΛΥΣΗ

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot υ \Leftrightarrow 2 \cdot E = 2 \cdot \frac{1}{2} \beta \cdot υ \Leftrightarrow 2 \cdot E = \beta \cdot υ \Leftrightarrow$$

$$\beta = \frac{2 \cdot E}{υ} \quad (1)$$

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot υ \Leftrightarrow 2 \cdot E = 2 \cdot \frac{1}{2} \beta \cdot υ \Leftrightarrow 2 \cdot E = \beta \cdot υ \Leftrightarrow$$

$$υ = \frac{2 \cdot E}{\beta} \quad (2)$$

α) Από σχέση (2) έχουμε : $v = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6 \text{ cm.}$

β) Από σχέση (1) έχουμε : $\beta = \frac{2 \cdot 35}{7} = 10 \text{ cm.}$

1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

• Η λύση προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων περιλαμβάνει τα επόμενα γενικά βήματα:

- ♦ Διαβάζουμε το πρόβλημα και διακρίνουμε τα **δεδομένα** και τα **ζητούμενα**.
- ♦ Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα συνήθως το x για να εκφράσουμε τον **άγνωστο αριθμό** που πρέπει να προσδιορίσουμε.
- ♦ Εκφράζουμε όλα τα **άλλα μεγέθη** του προβλήματος με τη βοήθεια του x .
- ♦ Γράφουμε την **εξίσωση** που προκύπτει από τα δεδομένα της εκφώνησης.
- ♦ Λύνουμε την **εξίσωση**.
- ♦ Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε **ικανοποιεί τις συνθήκες** του προβλήματος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να βρείτε τον αριθμό που το διπλάσιό του, αν το ελαττώσουμε κατά 8, δίνει τον αριθμό αυξημένο κατά 9.

ΛΥΣΗ

Έστω x ο αριθμός που θέλουμε να βρούμε ,τότε από τα δεδομένα του προβλήματος οδηγούμαστε στην εξίσωση :

$$2x - 8 = x + 9 \Leftrightarrow 2x - x = 8 + 9 \Leftrightarrow x = 17$$

Παρατηρούμε ότι αν διπλασιάσουμε το 17 δίνει 34 και αν ελαττώσουμε το 34 κατά 8 παίρνουμε 26 που ισούται με το 17 αυξημένο κατά 9.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Μία βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 10 λεπτά. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 15 λεπτά. Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή, αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες;

ΛΥΣΗ

Έστω ότι σε x λεπτά της ώρας γεμίζουν και οι δύο βρύσες την δεξαμενή.

Η πρώτη βρύση σε x λεπτά θα γεμίζει τα $\frac{x}{10}$ της δεξαμενής, αφού σε ένα λεπτό γεμίζει το $\frac{1}{10}$ αυτής.

Η δεύτερη βρύση σε x λεπτά θα γεμίζει τα $\frac{x}{15}$ της δεξαμενής, αφού σε ένα λεπτό γεμίζει το $\frac{1}{15}$ αυτής.

Άρα, προκύπτει η εξίσωση :

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = x \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{10} + \frac{x}{15} = 1, \text{ Ε.Κ.Π.}(10,15)=30$$

$$30 \cdot \frac{x}{10} + 30 \cdot \frac{x}{15} = 30 \Leftrightarrow 3x + 2x = 30 \Leftrightarrow 5x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{5} \Leftrightarrow$$

$x = 6$ λεπτά.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Η ανιψιά μου η Μαρίζα έγραψε 16 και 18 σε δύο Διαγωνίσματα Μαθηματικών.

- i. Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο 18 και στα τρία διαγωνίσματα;
- ii. Μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19;

ΛΥΣΗ

i. Έστω x ο βαθμός του τρίτου διαγωνίσματος, τότε από τα δεδομένα προκύπτει η εξίσωση :

$$\frac{16 + 18 + x}{3} = 18 \Leftrightarrow \frac{34 + x}{3} = 18 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{34 + x}{3} = 3 \cdot 18 \Leftrightarrow 34 + x = 54$$

$\Leftrightarrow x = 54 - 34 \Leftrightarrow x = 20$, άρα πρέπει να γράψει 20 στο τρίτο διαγώνισμα.

ii. Έστω x ο βαθμός του τρίτου διαγωνίσματος, τότε από τα δεδομένα προκύπτει η εξίσωση :

$$\frac{16 + 18 + x}{3} = 19 \Leftrightarrow \frac{34 + x}{3} = 19 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{34 + x}{3} = 3 \cdot 19 \Leftrightarrow 34 + x = 57$$

$x = 57 - 34 \Leftrightarrow x = 23$, άρα πρέπει να γράψει 23 στο τρίτο διαγώνισμα, το οποίο είναι αδύνατο, συνεπώς δεν μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Τρία αδέλφια μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό.

Ο μικρότερος έλαβε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 12 ευρώ ακόμη,

ο μεσαίος έλαβε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 8 ευρώ ακόμη και

ο μεγαλύτερος έλαβε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 6 ευρώ ακόμη.

Να βρεθεί το αρχικό χρηματικό ποσό και το μερίδιο του καθενός.

ΛΥΣΗ

Έστω x το αρχικό ποσό, από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση :

$$\frac{x}{5} + 12 + \frac{x}{4} + 8 + \frac{x}{3} + 6 = x \quad , \text{βρίσκουμε Ε.Κ.Π.}(3,4,5)=60 \quad , \text{άρα :}$$

$$60 \cdot \frac{x}{5} + 60 \cdot 12 + 60 \cdot \frac{x}{4} + 60 \cdot 8 + 60 \cdot \frac{x}{3} + 60 \cdot 6 = 60x$$

$$12x + 720 + 15x + 480 + 20x + 360 = 60x \Leftrightarrow 47x + 1560 = 60x$$

$$1560 = 60x - 47x \Leftrightarrow 13x = 1560 \Leftrightarrow x = \frac{1560}{13} \Leftrightarrow x = 120$$

Άρα το αρχικό χρηματικό ποσό ήταν 120 ευρώ. Συνεπώς ο μικρότερος πήρε $\frac{120}{5} + 12 = 24 + 12 = 36$ ευρώ, ο μεσαίος πήρε $\frac{120}{4} + 8 = 30 + 8 = 38$ ευρώ και ο μεγαλύτερος πήρε $\frac{120}{3} + 6 = 40 + 6 = 46$ ευρώ.

Παρατηρούμε επίσης ότι : $36 + 38 + 46 = 120$.

1.5 Ανισώσεις α' βαθμού

• Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$.

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$.

• Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

• Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την αντίστροφη φορά. Δηλαδή:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

• Μια ανισότητα που περιέχει έναν άγνωστο x , λέγεται **ανίσωση** με έναν άγνωστο.

• Ο τρόπος που ακολουθούμε για να λύσουμε μια ανίσωση, είναι παρόμοιος με τον τρόπο που ακολουθούμε στην επίλυση εξισώσεων. Δηλαδή:

♦ Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

♦ Κάνουμε αναγωγές ομοίων όρων.

♦ Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου. Αν ο συντελεστής είναι θετικός η ανισότητα δεν αλλάζει φορά, ενώ αν είναι αρνητικός πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να λύσετε την ανίσωση :

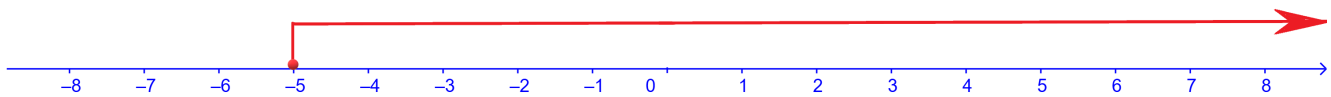
$$2(x - 1) - 3(x + 1) \leq 4(x + 2) + 12.$$

Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

ΛΥΣΗ

$$2x - 2 - 3x - 3 \leq 4x + 8 + 12 \Leftrightarrow 2x - 3x - 4x \leq 8 + 12 + 2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$-5x \leq 25 \Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} \geq \frac{25}{-5} \Leftrightarrow x \geq -5$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να λύσετε την ανίσωση :

$$\frac{5 - x}{4} + \frac{x + 2}{8} \geq x$$

Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

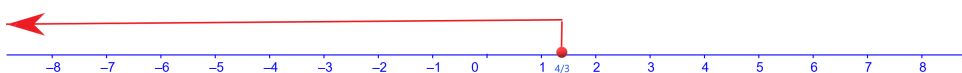
ΛΥΣΗ

Ε.Κ.Π.(4,8)=8 ,άρα θα έχουμε :

$$8 \cdot \frac{5 - x}{4} + 8 \cdot \frac{x + 2}{8} \geq 8x \Leftrightarrow 2 \cdot (5 - x) + x + 2 \geq 8x \Leftrightarrow$$

$$10 - 2x + x + 2 \geq 8x \Leftrightarrow -2x + x - 8x \geq -10 - 2 \Leftrightarrow -9x \geq -12 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-9x}{-9} \leq \frac{-12}{-9} \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να λύσετε την ανίσωση

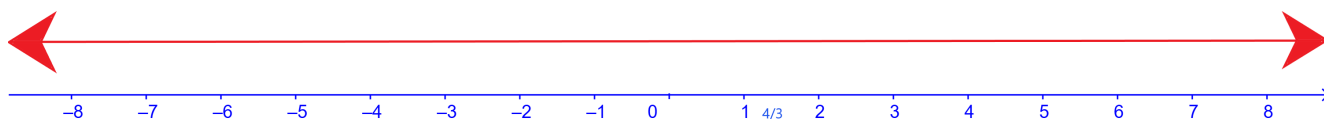
$$2(x - 1) - 3(x + 2) < 4(x + 1) - 5(x - 2).$$

Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

ΛΥΣΗ

$$2x - 2 - 3x - 6 < 4x + 4 - 5x + 10 \Leftrightarrow 2x - 3x - 4x + 5x < 4 + 10 + 6 + 2 \Leftrightarrow$$

$$0x < 22, \text{ που ισχύει για κάθε αριθμό.}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Να λύσετε την ανίσωση : $x + 2 + 2(x - 3) > 3x + 4$.

Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

ΛΥΣΗ

$x + 2 + 2x - 6 > 3x + 4 \Leftrightarrow x + 2x - 3x > 4 + 6 - 2 \Leftrightarrow 0x > 8$, η οποία είναι αδύνατη αφού δεν αληθεύει για κάποιον αριθμό. Συνεπώς δεν θα έχουμε και αναπαράσταση λύσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$$3x - 5 \leq x + 3 \text{ και } 4 < 14 + 5x.$$

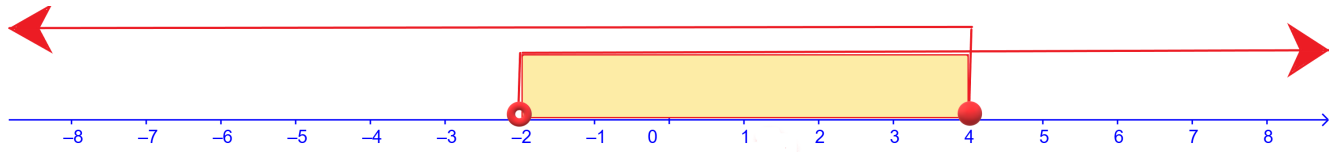
Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.

ΛΥΣΗ

$$3x - x \leq 3 + 5 \Leftrightarrow 2x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 4 \quad , \text{και}$$

$$4 - 14 < 5x \Leftrightarrow -10 < 5x \Leftrightarrow -2 < x \Leftrightarrow x > -2$$

Άρα οι κοινές λύσεις είναι για $x \leq 4$ και για $x > -2$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Να λύσετε την ανίσωση :

$$\frac{x + 1}{3} \leq 2 \leq \frac{3 - x}{2}$$

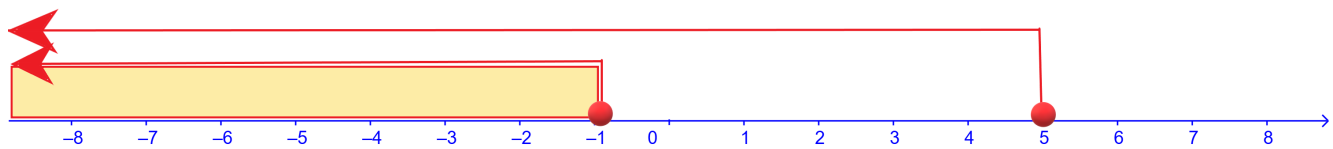
ΛΥΣΗ

$$\frac{x + 1}{3} \leq 2 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x + 1}{3} \leq 3 \cdot 2 \Leftrightarrow x + 1 \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 6 - 1 \Leftrightarrow x \leq 5 \quad \text{και}$$

$$2 \leq \frac{3 - x}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \leq 2 \cdot \frac{3 - x}{2} \Leftrightarrow 4 \leq 3 - x \Leftrightarrow 4 - 3 \leq -x \Leftrightarrow$$

$$1 \leq -x \Leftrightarrow \frac{1}{-1} \geq \frac{-x}{-1} \Leftrightarrow -1 \geq x \Leftrightarrow x \leq -1$$

Άρα οι κοινές λύσεις είναι για $x \leq -1$



.....
 mathematics ☺ ♥ ⚙️ ☺ mathematics

