θεωρία

συστήματα

άλγεβρα β λυκείου

Τζίκας Αριστοτέλης ● μαθηματικός

Περιεχόμενα

Όλη η θεωρία καθώς και οι εφαρμογές του σχολικού βιβλίου.

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία-Άλγεβρα 1^o κεφάλαιο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

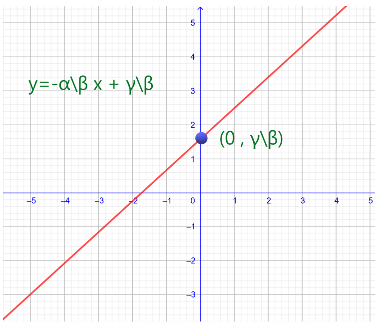
1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$

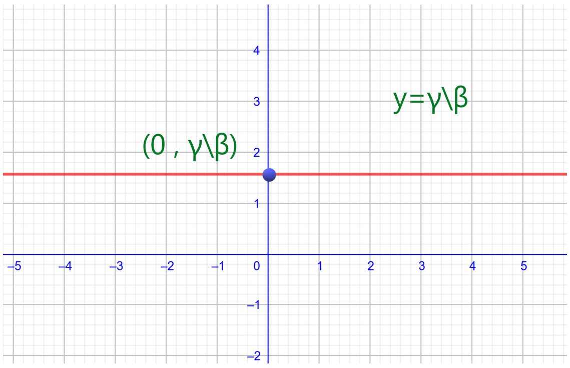
ΠΡΟΤΑΣΗ. *Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$,λέγεται γραμμική και παριστάνει ευθεία γραμμή.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

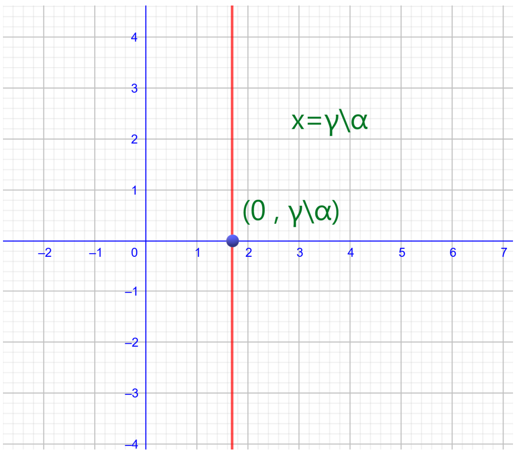
✦ Αν $\beta \neq 0$,τότε $\alpha x + \beta y = \gamma \underset{:\beta}{\Leftrightarrow} y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$,που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \frac{\gamma}{\beta})$.



✦✦ Αν επιπλέον εκτός από $\beta \neq 0$ έχουμε και $\alpha = 0$,τότε θα η εξίσωση θα πάρει την μορφή $y = \frac{\gamma}{\beta}$ που παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον $x'x$ και δέρχεται από το σημείο $(0, \frac{\gamma}{\beta})$



✦ Αν $\beta = 0$ και (προφανώς $\alpha \neq 0$) ,τότε θα έχουμε $\alpha x + 0 = \gamma \underset{:\alpha}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{\gamma}{\alpha}$,που παριστάνει ευθεία κάθετη στον $x'x$ η οποία διέρχεται από το σημείο του $x'x$ $(\dfrac{\gamma}{\alpha}, 0)$



● Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται λύση της γραμμικής εξίσωσης.

π.χ. Το ζεύγος $(2, 3)$ είναι λύση της εξίσωσης $x - 2y = -4$ και γενικά κάθε ζεύγος της μορφής $(k, \dfrac{k+4}{2}), k \in \mathbb{R}$ είναι λύση της.

Γραμμικό σύστημα $2x2$

• Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $\alpha x+\beta y=\gamma$ και $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών ,τότε λέμε ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα $2x2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha x+\beta y & = & \gamma\\ \alpha' x+\beta' y & = & \gamma'\end{array}\right.$$

• Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται λύση του συστήματος.
• Αν από ένα γραμμικό σύστημα με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς πάρουμε ένα σύστημα που έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό σύστημα ,τότε τα δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα.

✦ <u>ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ</u>

Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης το παρακάτω σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{ll}\boldsymbol{x-2y=6} & (1)\\ \boldsymbol{3x+4y=8} & (2)\end{array}\right.$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$\left\{\begin{array}{rcl}x-2y & = & 6\\ 3x+4y & = & 8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x & = & 2y+6\\ 3x+4y & = & 8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x & = & 2y+6\\ 3(2y+6)+4y & = & 8\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}x & = & 2y+6\\ 6y+18+4y & = & 8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x & = & 2y+6\\ 10y & = & -10\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x & = & 2y+6\\ y & = & -\dfrac{10}{10}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\left\{\begin{array}{rcl}x & = & 2\cdot(-1)+6\\ y & = & -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x & = & 4\\ y & = & -1\end{array}\right.$. Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4,-1)$

• Άν τώρα στο αρχικό σύστημα αντικαταστήσουμε το x με το 4 και το y με το -1 ,θα δούμε ότι και οι δύο εξισώσεις επαληθεύονται. Τη διαδικασία αυτή υην ονομάζουμε επαλήθευση του συστήματος.

✦ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Να λύσετε με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y = 6} & (1) \\ \boldsymbol{3x + 4y = 8} & (2) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

• Αρχικά πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλο αριθμό τις εξισώσεις ώστε να προκύψουν για έναν τουλάχιστο άγνωστο αντίθετοι συντελεστές.
• Μετά προθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

$$\begin{cases} x - 2y = 6 & ,\cdot(-3) \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 6y = -18 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \underset{+}{\Rightarrow} 0x + 10y = -10 \Leftrightarrow y = -\frac{10}{10} \Leftrightarrow y = -1 \underset{(1)}{\Rightarrow} x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4$$

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος $2x2$

Να λύσετε το παρακάτω σύστημα γραφικά

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y =} & \boldsymbol{6} \\ \boldsymbol{3x + 4y =} & \boldsymbol{8} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Για να σχεδιάσουμε μία ευθεία χρειαζόμαστε δύο σημεία. Άρα για κάθε εξίσωση θα έχουμε και τον αντίστοιχο πίνακα τιμών.
✦ Για την εξίσωση $x - 2y = 6$,έχουμε:

x	0	6
y	-3	0

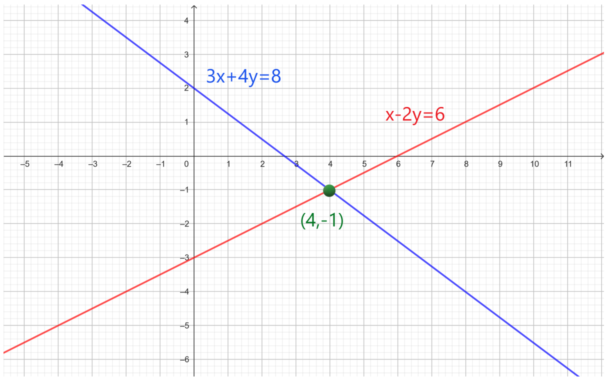
Άρα η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $A(0,-3)$ και $B(6,0)$

✦ Για την εξίσωση $3x + 4y = 8$,έχουμε:

x	0	$\frac{8}{3}$
y	2	0

Άρα η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0, 2)$ και $\Delta\left(\dfrac{8}{3}, 0\right)$

✦ Τέλος σχεδιάζουμε τις ευθείες :



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το $(4, -1)$,που είναι η λύση.

● Γενικά από την γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $2x2$ μπορει να έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

$i.$ Οι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο ,άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$ii.$ Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες ,άρα το σύστημα δεν έχει λύση ,δηλαδή είναι αδύνατο.

$iii.$ Οι δύο ευθείες ταυτίζονται ,άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

● Γενικά, από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $2x2$ αναμένουμε μια μόνο από τις περιπτώσεις:

✦ Το σύστημα να έχει μοναδική λύση

✦ Το σύστημα να μην έχει λύσεις άρα να είναι αδύνατο.

✦ Το σύστημα να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Λύση – διερεύνηση γραμμικού συστήματος $2x2$

Έστω το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$

Ορίζουσα του συστήματος ονομάζουμε την παράσταση :

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}=\alpha\beta'-\alpha'\beta.$$

Επίσης ορίζουμε τις παραστάσεις: $D_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}=\gamma\beta'-\gamma'\beta.$

και $D_y=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma.$

Το γραμμικό σύστημα :

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

- Αν $D\neq 0$,τότε έχει μοναδική λύση ,την (x,y) με $x=\dfrac{D_x}{D}$ και $y=\dfrac{D_y}{D}$
- Αν $D=0$,τότε είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

π.χ. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \boldsymbol{x-2y=6} \\ \boldsymbol{3x+4y=8} \end{cases}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θα έχουμε : $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-(-2)\cdot 3=4+6=10\neq 0$

,άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - (-2) \cdot 8 = 24 + 16 = 40$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 6 \cdot 3 = 8 - 18 = -10$$

Άρα η λύση θα είναι : $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{40}{10}, \frac{-10}{10}\right) = (4, -1)$.

π.χ. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = 40} \\ \mathbf{4x - 6y = 80} \end{cases}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θα έχουμε : $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) - (-3) \cdot 4 = -12 + 12 = 0$,άρα το σύστημα θα είναι αδύνατο ή θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων (αόριστο).

Παρατηρούμε ότι $\begin{cases} 2x - 3y = 40 & (1) \\ 4x - 6y = 80 & (2) \end{cases} \underset{(2):2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases}$ Άρα οι ευθείες ταυτίζονται ,δηλαδή θα έχουμε άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής : $\left(k, \frac{2k - 40}{3}\right)$, $k \in \mathbb{R}$,αφού από την εξίσωση : $2x - 3y = 40 \Leftrightarrow 3y = 2x - 40 \Leftrightarrow y = \frac{2x - 40}{3}$.

π.χ. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \mathbf{3x + y = 11} \\ \mathbf{9x + 3y = 6} \end{cases}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θα έχουμε : $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 9 = 9 - 9 = 0$,άρα το σύστημα θα είναι αδύνατο ή θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων (αόριστο).

Παρατηρούμε ότι $\begin{cases} 3x+y=11 & (1) \\ 9x+3y=6 & (2) \end{cases} \underset{(2):3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+y=11 \\ 3x+y=2 \end{cases}$ Άρα το σύστημα είναι αδύνατο αφού δεν μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονα $3x+y=11$ και $3x+y=2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda x - y = \lambda - 1} \\ \boldsymbol{\lambda^2 x - 2y = \lambda} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε την ορίζουσα D καθώς και τις D_x και D_y.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda - (-1)\lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda-1) - (-1)\lambda = -2\lambda + 2 + \lambda = 2 - \lambda$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^2(\lambda-1) = \lambda^2(1-\lambda+1) = \lambda^2(2-\lambda)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

✦ Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$,τότε το σύστημα έχει

μοναδική λύση :$(x,y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{2-\lambda}{\lambda(\lambda-2)}, \frac{\lambda^2(2-\lambda)}{\lambda(\lambda-2)}\right)$

$= \left(-\frac{1}{\lambda}, -\lambda\right)$

✦ Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 2$

✦✦ Αν $\lambda = 0$,τότε το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} 0 \cdot x - y = 0 - 1 \\ 0^2 \cdot x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$,άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

✦✦ Αν $\lambda = 2$,τότε το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} 2 \cdot x - y = 2 - 1 \\ 2^2 \cdot x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ 4x - 2y = 2 & (2) \end{cases} \underset{(2):2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

,άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $(k, 2k-1) \quad k \in \mathbb{R}$.

Γραμμικό Σύστημα $3x3$

• Μία εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, με έναν τουλάχιστον από τους συντελεστές α, β, γ διάφορο του μηδενός, λέγεται γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους.

• Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης με τρεις αγνώστους λέγεται κάθε τριάδα αριθμών που την επαληθεύει.

• Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους :

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1, \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2, \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_2$$

και ζητάμε τις κοινές λύσεις τους, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα $3x3$ και γράφουμε :

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_2 \end{cases}$$

• Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε μεθόδους ανάλογες με τις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $2x2$.

• Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λύνουμε τη μία από τις τρεις εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, π.χ. την τρίτη εξίσωση ως προς z και αντικαθιστούμε στις άλλες δύο. Έτσι καταλήγουμε σε ένα συστημα $2x2$ με αγνώστους x και y το οποίο λύνουμε και ανάλογα :

✦ αν έχει μοναδική λύση

✦ αν είναι αδύνατο ή

✦ αν έχει άπειρο πλήθος λύσεων

βγάζουμε συμπέρασμα για το $3x3$ σύστημα.

π.χ. Να λύσετε το παρακάτω γραμμικό $3x3$ σύστημα:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x - y + 3z = -9} & (1) \\ \boldsymbol{x + 3y - z = 10} & (2) \\ \boldsymbol{3x + y - z = 8} & (3) \end{cases}$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Από την εξίσωση (3) έχουμε $z = 3x + y - 8$,άρα με αντικατάσταση του z στις εξισώσεις (1) και (2) ,θα έχουμε το $2x2$ σύστημα :

$$\begin{cases} 2x - y + 3(3x + y - 8) = -9 \\ x + 3y - (3x + y - 8) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x + 2y = 15 & (1) \\ -2x + 2y = 2 & (2) \end{cases} \underset{(2):2}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} 11x + 2y = 15 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x + 2(1 + x) = 15 \\ y = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 13 \\ y = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

,άρα $z = 3 \cdot 1 + 2 - 8 = -3$

Τελικά το σύστημα θα έχει την μοναδική λύση :

$$(x, y, z) = (1, 2, -3)$$

1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

• Η επίλυση πολλών προβλημάτων οδηγεί συχνά σε ένα σύνολο εξισώσεων των οποίων ζητάμε τις κοινές λύσεις, αλλά οι εξισώσεις αυτές δεν είναι όλες γραμμικές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να λύσετε το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα:

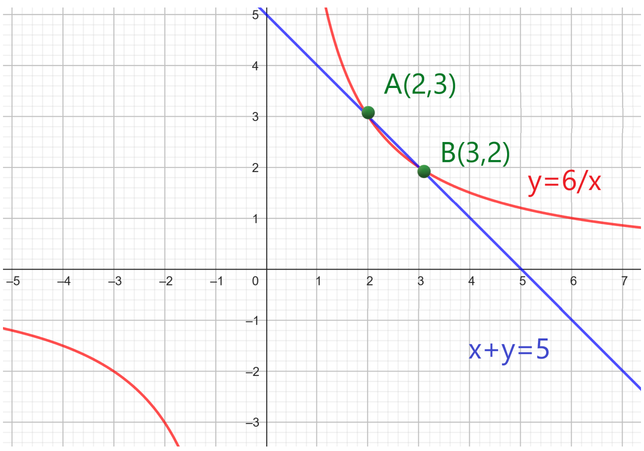
$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y=5} & (1) \\ \boldsymbol{x \cdot y = 6} & (2) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$\begin{cases} y = 5-x \\ x(5-x)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ x^2-5x+6=0 \end{cases}$ Άρα θα λύσουμε την εξίσωση :

$x^2-5x+6=0 \quad , \Delta = 25-24=1 \quad x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow$
$x_1 = 2 \quad , x_2 = 3$

Άρα αν $x=2 \Rightarrow y=3$ και αν $x=3 \Rightarrow y=2$
Συνεπώς τα σημεία τομής της ευθείας με εξίσωση : $x+y=5$ και της υπερβολής με εξίσωση : $y=\dfrac{6}{x} \quad , x \neq 0$ είναι τα $A(2,3)$ και $B(3,2)$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \cdot y = 6} & \textbf{(1)} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = 13} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$$(1) \Leftrightarrow y = \frac{6}{x} \qquad , x \neq 0$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} = 13 \underset{\cdot x^2}{\Leftrightarrow} x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μία διτετράγωνη εξίσωση ,συνεπώς θέτουμε $x^2 = \omega \qquad , \omega > 0$,αφού ξέρουμε ότι $x \neq 0$

Άρα θα έχουμε : $\omega^2 - 13\omega + 36 = 0 \qquad , \Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25$

Άρα $\omega_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \omega_1 = 4, \omega_2 = 9$. Αν $\omega = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ Αν $\omega = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$. Τελικά για $x = 2 \Rightarrow y = 3$,για $x = -2 \Rightarrow y = -3$,για $x = 3 \Rightarrow y = 2$ και για $x = -3 \Rightarrow y = -2$.

Άρα η υπερβολή με εξίσωση :$x \cdot y = 6$ και ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{13}$ με εξίσωση $x^2 + y^2 = 13$,έχουν 4 κοινά σημεία. $A(2,3), B(3,2), \Gamma(-2,-3)$ και $\Delta(-3,-2)$