

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1<sup>ο</sup> κεφάλαιο

## ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4<sup>ο</sup>

ΕΩΣ ΚΑΙ ΤΙΣ "1 – 1" ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α'

[A<sub>1</sub>] Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι "1 – 1" σε ένα σύνολο  $A$  υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ ;

MON : 5

[A<sub>2</sub>] Να αποδείξετε ότι αν  $f \downarrow \Delta_1$  και  $g \uparrow \Delta_2$ , με  $\Delta_1, \Delta_2$  διαστήματα, τότε εφόσον ορίζεται η συνάρτηση  $f - g$  θα είναι γνησίως φθίνουσα.

MON : 4

[A<sub>3</sub>] Να συμπληρώσετε τη συνάρτηση  $f$  με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & , x \leq e \\ \dots\dots\dots & , \dots\dots\dots \end{cases} .$$

ώστε η συνάρτηση  $f$  που θα προκύψει να είναι "1 – 1" και να έχει ολικό μέγιστο ίσο με 9.

MON : 6

[A<sub>4</sub>] Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ανάλογα, με τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**

α. Αν  $f \uparrow \Delta_1$  και  $g \downarrow \Delta_2$ , τότε η  $f \circ g$ , εφόσον ορίζεται θα είναι φθίνουσα

MON : 2

β. Αν  $f$  άρτια και  $f(x_1) = fmax$ , τότε και  $f(-x_1) = fmax$ .

MON : 2

γ. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης "1 – 1" τέμνει οποιαδήποτε ευθεία, με συντελεστή διεύθυνσης μηδέν, το πολύ μία φορά.

MON : 2

δ. Κάθε "1 – 1" συνάρτηση είναι και γνησίως μονότονη.

MON : 2

ε. Υπάρχει συνάρτηση που έχει ολικό μέγιστο σε άπειρες θέσεις διαφορετικές μεταξύ τους.

MON : 2

ΘΕΜΑ Β'

[B<sub>1</sub>] Να βρείτε ,εφόσον υπάρχουν ,τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων αιτιολογώντας πλήρως την απαντησή σας.

i.  $f(x) = \ln(x - 1)$  ,  $x \leq e + 1$  MON :5

ii.  $g(x) = 3x^2 - 2x$  MON :5

iii.  $h(x) = 5\eta\mu x - 4$  MON :5

[B<sub>2</sub>] Έστω η συνάρτηση  $\phi$  με  $\phi(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \leq 0 \\ \eta\mu x - 1 & , 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

i. Να ελέγξετε αν είναι "1 - 1" αιτιολογώντας την απαντησή σας. MON :5

ii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $\phi(x) = \alpha$  για κάθε τιμή του  $\alpha$  ,όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ . MON :5

ΘΕΜΑ Γ'

[Γ<sub>1</sub>] Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} -x^3 & , x \leq 0 \\ -x - 1 & , x > 0 \end{cases}$ .

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι "1 - 1" ,χωρίς τη βοήθεια της  $C_f$ . MON :6

ii. Είναι η συνάρτηση  $f$  γνησίως μονότονη στο  $A_f$  ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας χωρίς τη βοήθεια της  $C_f$ . MON :6

iii. Να σχεδιάσετε τη  $C_f$ . MON :4

[Γ<sub>2</sub>] Έστω η συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & , x \leq -1 \\ \sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$ .

i. Να βρείτε τη συνάρτηση  $g \circ f$ . MON :6

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f + g$ . MON :3

ΘΕΜΑ Δ'

Έστω η συναρτήση  $f$  για την οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει η σχέση :

$$f(f(x)) + 3f(x) = 4x - 10 \quad (1)$$

[Δ<sub>1</sub>] Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι "1 - 1". MON :7

[Δ<sub>2</sub>] Αν η  $f$  είναι γνησίως μονότονη ,τότε να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης  $f$ . MON :9

[ $\Delta_3$ ] Να βρείτε το  $f(0)$  και το πρόσημο της συνάρτησης  $f$  αν γνωρίζετε ότι  $f(2) = 0$ .

MON :4

[ $\Delta_4$ ] Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει :

$$f(4x - 10 - 3f(x)) = 4f(x) - 10 - 3f(f(x)).$$

MON :5

## ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ

ΘΕΜΑ Α'	ΘΕΜΑ Β'	ΘΕΜΑ Γ'	ΘΕΜΑ Δ'	ΣΥΝΟΛΟ
$\overline{25}$	$\overline{25}$	$\overline{25}$	$\overline{25}$	$\overline{100}$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΤΗΣΕΙΣ :

