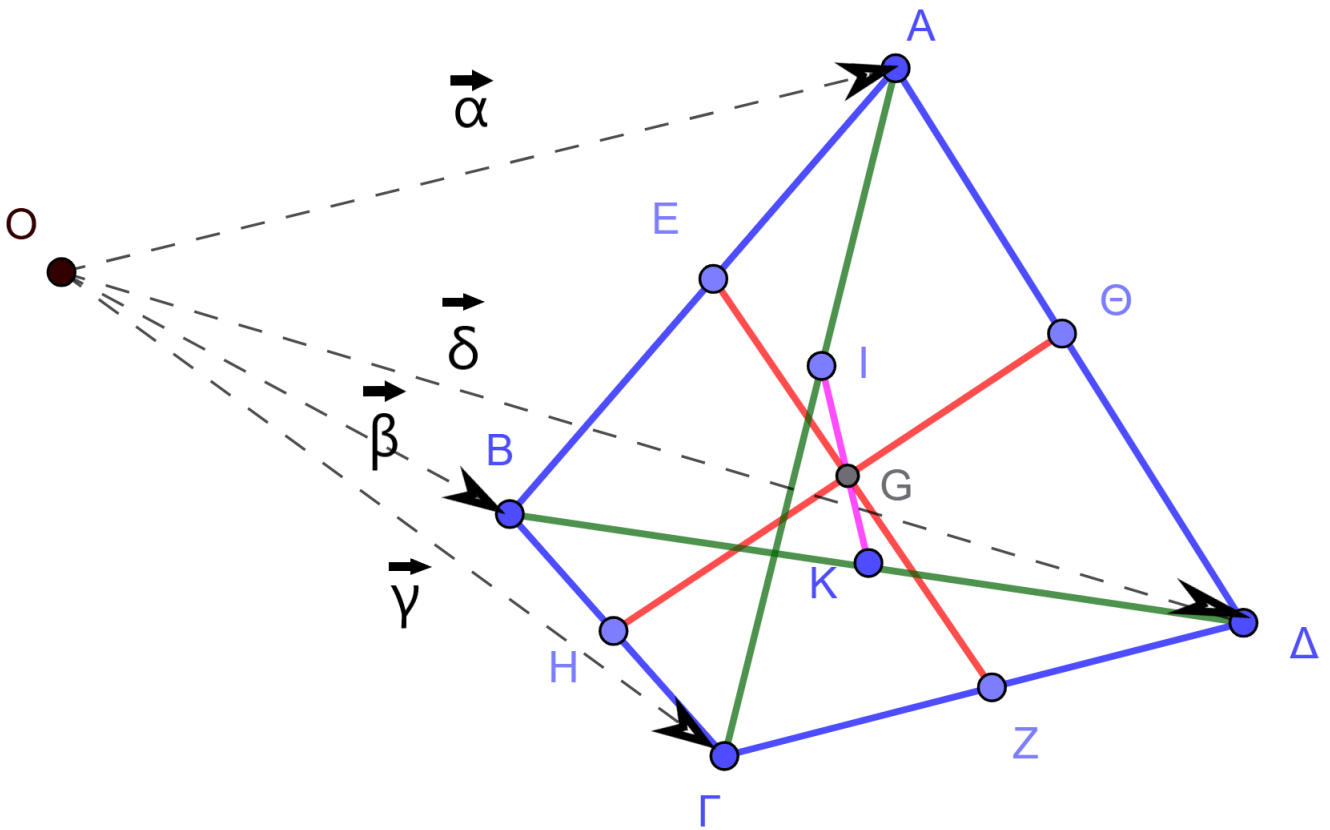


Θεωρία

διανύσματα



μαθηματικά κατεύθυνσης

β λυκείου

Τζίκας Αριστοτέλης ● μαθηματικός

Περιεχόμενα

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ	2
Ορισμός-του-Διανύσματος	2
Αντίθετα-Διανύσματα	6
Γωνία-δύο-Διανυσμάτων	7
1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	9
Πρόσθεση-Διανυσμάτων	9
Ιδιότητες-Πρόσθεσης-Διανυσμάτων	10
Αφαίρεση-Διανυσμάτων	12
Διάνυσμα-Θέσεως	12
Μέτρο-Αθροίσματος-Διανυσμάτων	13
1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ	14
Ορισμός-Πολλαπλασιασμού-Αριθμού-με-Διάνυσμα	14
Ιδιότητες-Πολλαπλασιασμού-Αριθμού-με-Διάνυσμα	15
Γραμμικός-Συνδυασμός-Διανυσμάτων	16
Συνθήκη-Παραλληλίας-Διανυσμάτων	16
Διανυσματική-Ακτίνα-Μέσου-Τμήματος	17
1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	19
Άξονας	19
Καρτεσιανό-Επίπεδο	19
Συντεταγμένες-Διανύσματος	20
Συντεταγμένες-Γραμμικού-Συνδυασμού-Διανυσμάτων	22
Συντεταγμένες-Μέσου-Τμήματος	22
Συντεταγμένες-Διανύσματος-με-Γνωστά-Άκρα	23
Μέτρο-Διανύσματος	24
Συνθήκη-Παραλληλίας-Διανυσμάτων	26
Συντελεστής-Διεύθυνσης-Διανύσματος	27
1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ	28
Αναλυτική-Έκφραση-Εσωτερικού-Γινομένου	29
Συνημίτονο-Γωνίας-δύο-Διανυσμάτων	31

Όλη η θεωρία καθώς και οι εφαρμογές του σχολικού βιβλίου.



www.captainmathblog.centerplay.gr



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

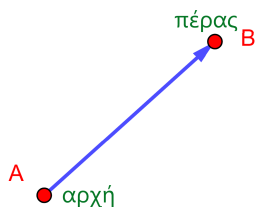
Θεωρία 1^ο κεφάλαιο

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Ορισμός-του-Διανύσματος

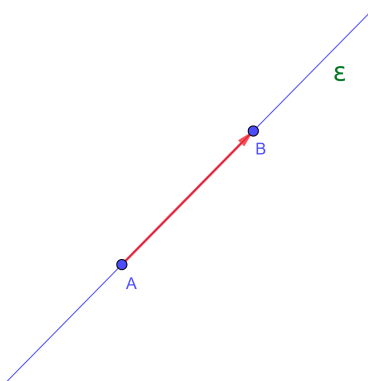
- Υπάρχουν **μεγέθη**, όπως είναι η μάζα, ο όγκος, η πυκνότητα, η θερμοκρασία κτλ., τα οποία προσδιορίζονται από το **μέτρο** τους και από την αντίστοιχη **μονάδα μέτρησης**. Τα μεγέθη αυτά λέγονται **μονόμετρα** ή **βαθμωτά**.
- Υπάρχουν **μεγέθη**, όπως είναι η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση κτλ., που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το **μέτρο** τους και τη **μονάδα μέτρησης**, χρειαζόμαστε τη **διεύθυνση** και τη **φορά** τους. Τέτοια μεγέθη λέγονται **διανυσματικά** ή απλώς **διανύσματα**.
- Το **διάνυσμα** στη Γεωμετρία ορίζεται ως ένα **προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα**.
- Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή**, ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος.
- Το διάνυσμα με **αρχή το A και πέρας το B** συμβολίζεται με \overrightarrow{AB} παριστάνεται με ένα **βέλος** που ξεκινάει από το **A** και καταλήγει στο **B**.



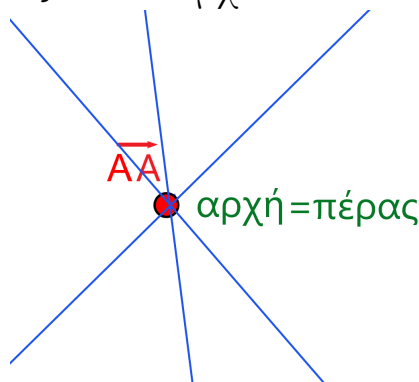
- Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό**. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα \overrightarrow{AA} είναι **μηδενικό** διάνυσμα.



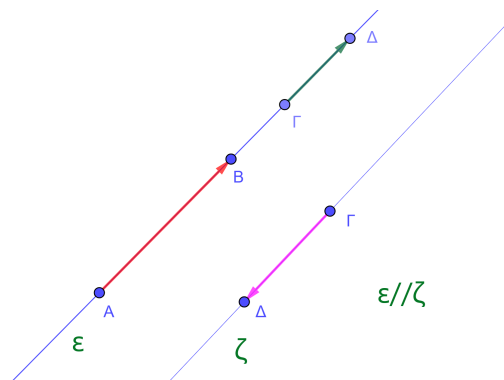
- Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε πολλές φορές τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου επιγραμμισμένα με βέλος για παράδειγμα \vec{a} , \vec{u} , \vec{v} ...κλπ.
- Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , λέγεται μέτρο ή μήκος του διανύσματος και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$.
- Αν ένα διάνυσμα έχει μέτρο 1, τότε λέγεται μοναδιαίο.
- Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα λέγεται φορέας του διανύσματος.



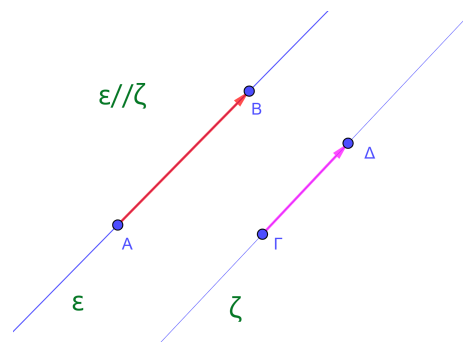
- Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος \vec{AA} μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A .



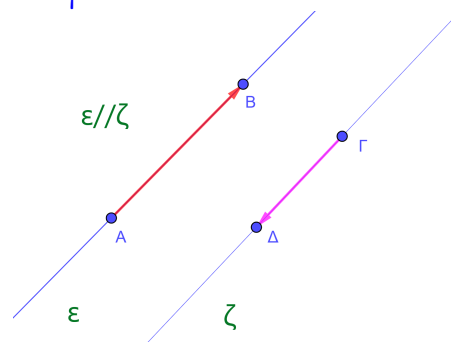
- Αν ο φορέας ενός διανύσματος \vec{AB} είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ , τότε λέμε ότι το \vec{AB} είναι παράλληλο προς τη ζ και γράφουμε $\vec{AB} // \zeta$
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$ που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$ έχουν ίδια διεύθυνση και γράφουμε $\vec{AB} // \vec{\Gamma\Delta}$.



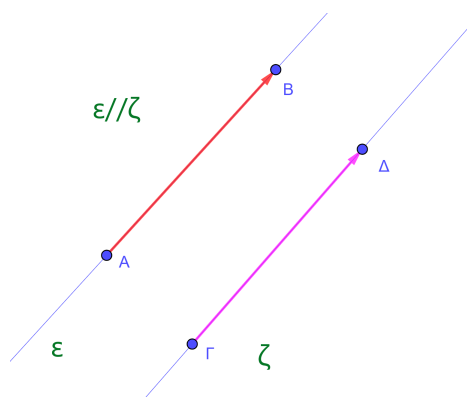
- Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε ομόρροπα και αντίρροπα.
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται ομόρροπα $\vec{AB} \parallel \vec{\Gamma\Delta}$ όταν έχουν ίδια διεύθυνση και ίδια φορά, δηλαδή όταν έχουν ίδια κατεύθυνση.



- Δύο μη μηδενικά διανύσματα \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται αντίρροπα $\vec{AB} \updownarrow \vec{\Gamma\Delta}$ όταν έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά, δηλαδή όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση.



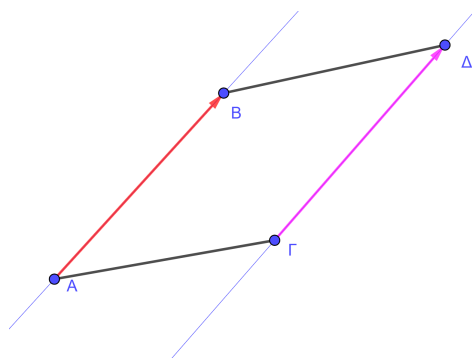
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ίσα όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.
- Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$.



- Να αποδείξετε ότι αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε θα ισχύει και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$

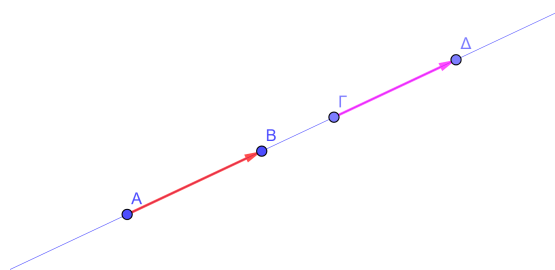
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1^η περίπτωση : Αν τα διανύσματα έχουν παράλληλους φορείς.



τότε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού ισχύει $AB = \Gamma\Delta$ και $AB // \Gamma\Delta$. Συνεπώς θα ισχύει και $A\Gamma = B\Delta$ και $A\Gamma // B\Delta$, άρα $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$

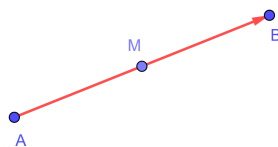
2^η περίπτωση : Αν τα διανύσματα έχουν τον ίδιο φορέα.



Παρατηρούμε ότι $A\Gamma = AB + B\Gamma = B\Gamma + \Gamma\Delta = B\Delta$ άρα $|\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Delta}|$ και $\overrightarrow{A\Gamma} \uparrow \overrightarrow{B\Delta}$, άρα και πάλι $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$

- Να αποδείξετε ότι αν M είναι το μέσον του AB , τότε $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ και αντιστρόφως.

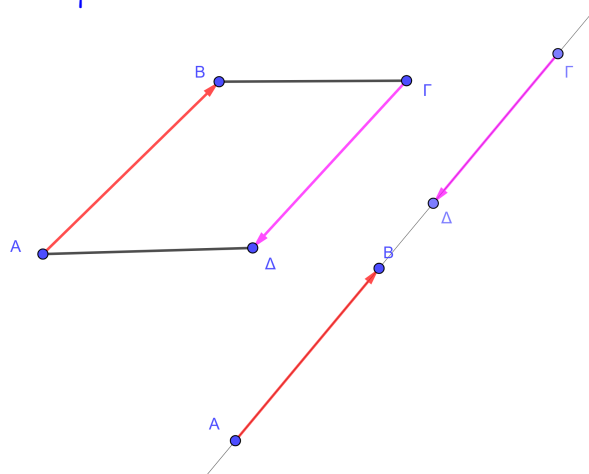
ΑΠΟΔΕΙΞΗ



- ♦ Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{MB}$ και γνωρίζουμε επίσης ότι $AM = MB$, δηλαδή ότι $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MB}|$, άρα $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.
- ♦ Αντίστροφα αν $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, τότε τα A, M, B θα είναι συνευθειακά και θα ισχύει $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MB}|$, άρα $AM = MB$ και συνεπώς το M είναι το μέσο του AB .

Αντίθετα-Διανύσματα

- Δύο διανύσματα λέγονται *αντίθετα*, όταν έχουν *αντίθετη κατεύθυνση* και *ίσα μετρα*.
- Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι *αντίθετα*, γράφουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ή $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}$.

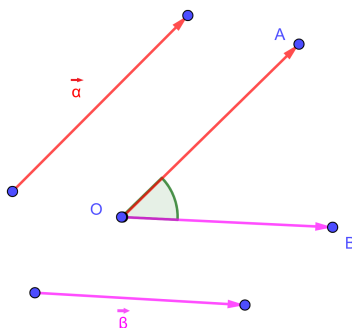


Είναι φανερό ότι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$
 Επίσης έχουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ή $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Γωνία-δύο-Διανυσμάτων

- Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και β .

Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.



Την κυρτή γωνία \widehat{AOB} , που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB , την ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τη συμβολίζουμε με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ ή $(\vec{\beta}, \vec{\alpha})$ ή ακόμα, και με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα θ .

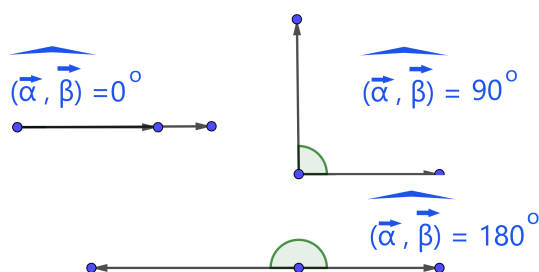
- Οι τιμές που μπορεί να πάρει η θ είναι : $0 \leq \theta \leq \pi$ σε ακτίνια ή $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ σε μοίρες.

- Ειδικότερα :

◆ $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ ομόρροπα , τότε $\hat{\theta} = 0$

◆ $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ αντίρροπα , τότε $\hat{\theta} = \pi$

◆ $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ κάθετα ή ορθογώνια , τότε $\hat{\theta} = \frac{\pi}{2}$



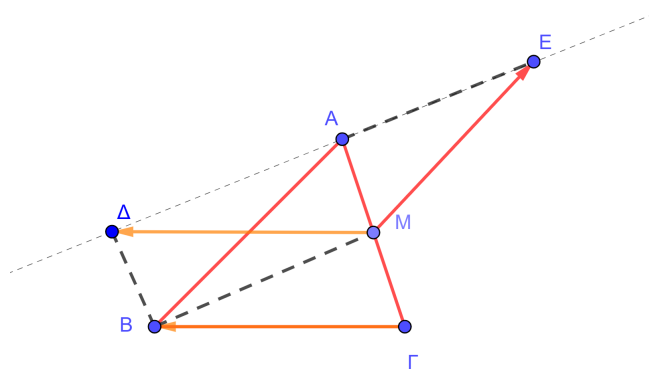
- Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα , τότε ως γωνία τους μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

- Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα, $\vec{0}$, είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω M το μέσο της πλευράς $A\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Με αρχή το M γράφουμε τα διανύσματα $\vec{M\Delta} = \vec{\Gamma B}$ και $\vec{M\epsilon} = \vec{B\Delta}$. Να αποδειχτεί ότι το A είναι το μέσο του $\Delta\epsilon$.

ΛΥΣΗ



Αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{\Delta A} = \vec{A\epsilon}$.

Από τη σχέση $\vec{M\Delta} = \vec{\Gamma B} \Rightarrow \Delta M\Gamma B$ παραλληλόγραμμο, άρα

$\vec{\Gamma M} = \vec{B\Delta} \Rightarrow \vec{B\Delta} \stackrel{\Gamma M = M\Delta}{=} \vec{M\Delta} \Rightarrow \Delta M B \Delta$ παραλληλόγραμμο, άρα
 $\vec{\Delta A} = \vec{B M}$ (1).

Από τη σχέση $\vec{M\epsilon} = \vec{B\Delta} \Rightarrow \Delta \epsilon M B$ παραλληλόγραμμο, άρα

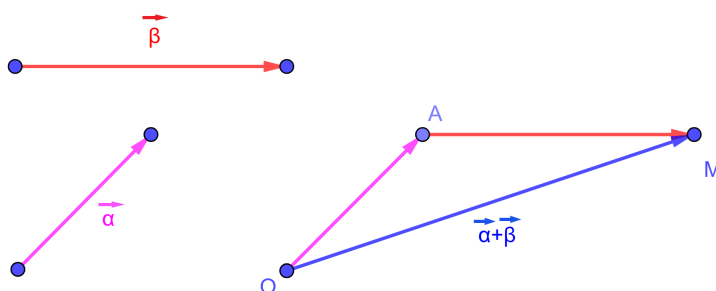
$\vec{A\epsilon} = \vec{B M}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2), έπεται το ζητούμενο.

1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Πρόσθεση-Διανυσμάτων

- Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το A παίρνουμε διάνυσμα $\vec{AM} = \vec{\beta}$
- Το διάνυσμα \vec{OM} λέγεται *άθροισμα* ή *συνισταμένη* των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.



ΠΡΟΤΑΣΗ. Το άθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου O .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω O' ένα άλλο σημείο με $\vec{O'A'} = \vec{OA}$ και $\vec{A'M'} = \vec{AM}$

♦ Εφόσον $\vec{OA} = \vec{O'A'}$ \Rightarrow

$$\vec{OO'} = \vec{AA'} \quad (1)$$

♦ Εφόσον $\vec{AM} = \vec{A'M'}$ \Rightarrow

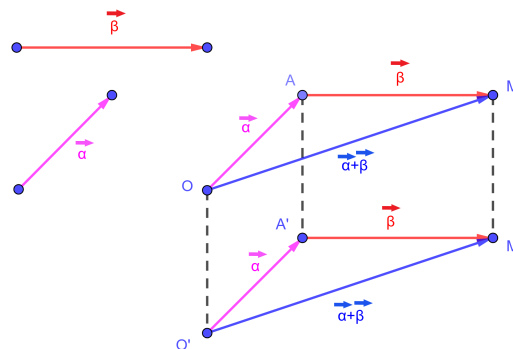
$$\vec{AA'} = \vec{MM'} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και

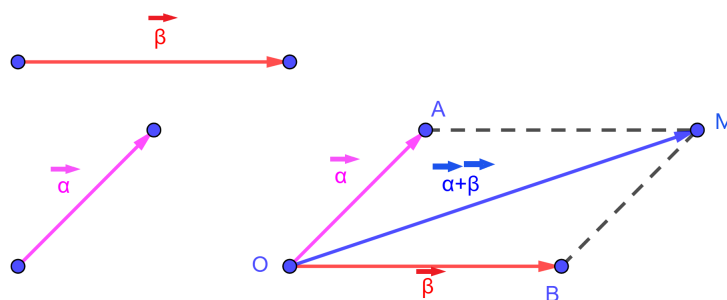
(2), έχουμε ότι: $\vec{OO'} =$

$$\vec{MM'} \Rightarrow \vec{OM} = \vec{O'M'} =$$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$



- Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο **κανόνα του παραλληλόγραμμου**.



Δηλαδή αν με αρχή το σημείο O πάρουμε $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, τότε το διάνυσμα \overrightarrow{OM} της διαγωνίου του παραλληλογράμμου $OAMB$ ισούται με το διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

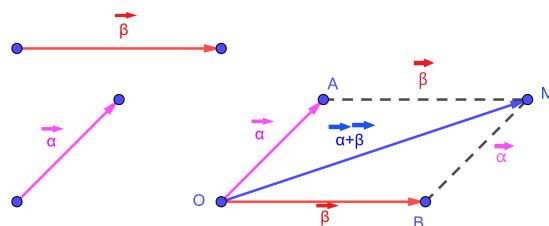
Ιδιότητες-Πρόσθεσης-Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα τότε ισχύουν :

(1) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$	Αντιμεταθετική ιδιότητα
(2) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$	Προσεταιριστική ιδιότητα
(3) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$	ουδέτερο στοιχείο
(4) $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$	συμμετρικό στοιχείο

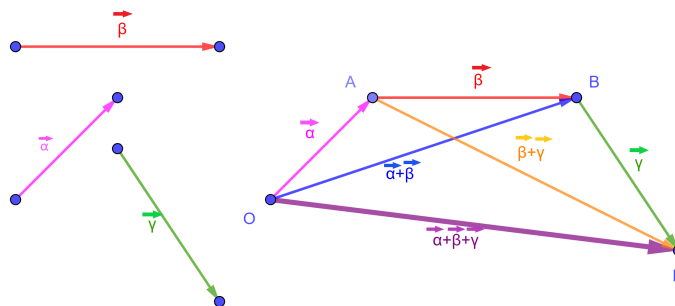
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. ♦ Παρατηρούμε από το σχήμα ότι: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$



2. ♦ Παρατηρούμε από το σχήμα ότι:

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BG} = \vec{OB} + \vec{BG} = \vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BG}) = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$$



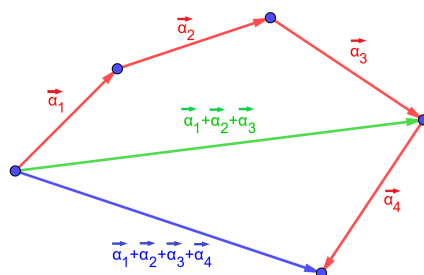
3. ♦ Προφανώς ισχύει : $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{OA} + \vec{AA} = \vec{OA} = \vec{\alpha}$

4. ♦ Προφανώς ισχύει :

$$\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{OA} + (-\vec{OA}) = \vec{OA} + \vec{AO} = \vec{OO} = \vec{0}$$

• Το άθροισμα περισσότερων διανυσμάτων $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_{\nu-1} + \vec{\alpha}_{\nu}$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής :

$$\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_{\nu-1} + \vec{\alpha}_{\nu} = (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_{\nu-1}) + \vec{\alpha}_{\nu}$$



• Δηλαδή, για να προσθέσουμε ν διανύσματα $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \dots + \vec{\alpha}_{\nu-1} + \vec{\alpha}_{\nu}$ τα καθιστούμε *διαδοχικά*, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου.

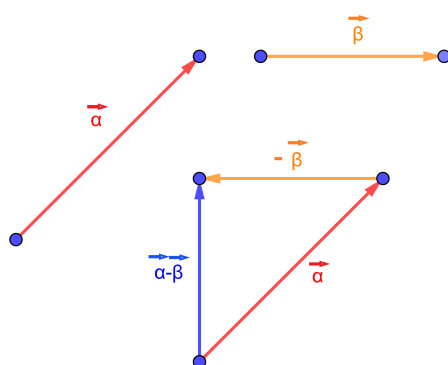
• Επειδή ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, το άθροισμα δε μεταβάλλεται αν αλλάξει η σειρά των

προσθετέων ή αν μερικοί από αυτούς αντικατασταθούν με το άθροισμά τους.

Αφαίρεση-Διανυσμάτων

- Η διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή :

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$



- Αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα \vec{x} , τέτοιο, ώστε $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \Leftrightarrow -\vec{\beta} + \vec{\beta} + \vec{x} = -\vec{\beta} + \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

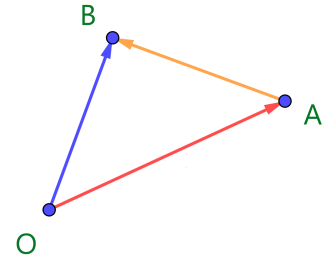
Διάνυσμα-Θέσεως

- Έστω O ένα σταθερό σημείο του επιπέδου. Τότε για κάθε σημείο M του επιπέδου ορίζεται το διάνυσμα \vec{OM} , το οποίο λέγεται διάνυσμα θέσεως του M ή διανυσματική ακτίνα του M .
- Το σημείο O , που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του επιπέδου, λέγεται σημείο αναφοράς.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του *πέρματος* μείον τη διανυσματική ακτίνα της *αρχής*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα \overrightarrow{AB} έχουμε $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ και επομένως:

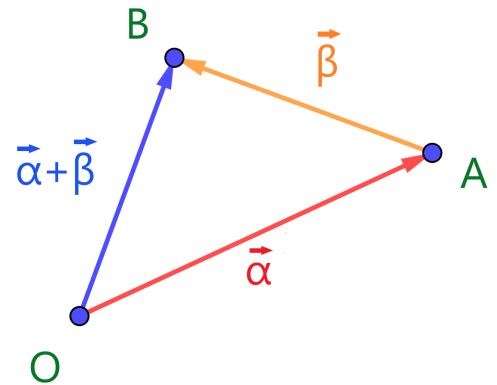


$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Μέτρο-Αθροίσματος-Διανυσμάτων

Από την *τριγωνική ανισότητα* έχουμε:

$$\left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$$



- Η ισότητα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, ισχύει όταν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.
- Η ισότητα $\left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$, ισχύει όταν $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Για τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ να αποδειχτεί ότι :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B}$$

ΛΥΣΗ

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GB}$$

που ισχύει.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να αποδείξετε ότι :

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|$$

ΛΥΣΗ

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε :

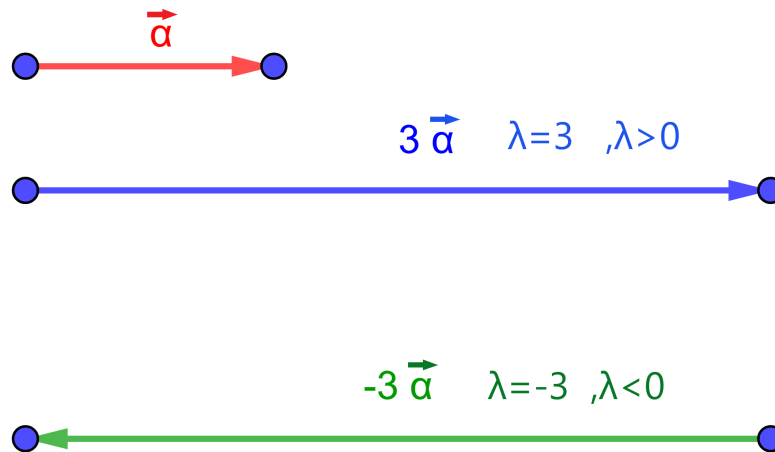
$$|(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\gamma}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|$$

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Ορισμός-Πολλαπλασιασμού-Αριθμού-με-Διάνυσμα

- Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα.
- Ονομάζουμε **γινόμενο** του λ με το $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:
 - ◆ είναι **ομόρροπο** του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και **αντίρροπο** του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$
 - ◆ έχει μέτρο : $|\lambda||\vec{\alpha}|$

π.χ.



- Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$, τότε το $\lambda \vec{a}$ είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα.

Ιδιότητες-Πολλαπλασιασμού-Αριθμού-με-Διάνυσμα

Για το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{\beta} \\ (2) \quad & (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \\ (3) \quad & \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \end{aligned}$$

- Ως συνέπεια του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε :

- i. $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$
- ii. $(-\lambda\vec{a}) = \lambda(-\vec{a}) = -(\lambda\vec{a})$
- iii. $\lambda(\vec{a} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{\beta}$
- iv. $(\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$
- v. Αν $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$
- vi. Αν $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$

Γραμμικός-Συνδυασμός-Διανυσμάτων

- Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
- Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων.

π.χ. $\vec{v} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} + \mu \vec{\gamma}$

Συνθήκη-Παραλληλίας-Διανυσμάτων

ΘΕΩΡΗΜΑ. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

◆ Γνωρίζουμε ότι αν ισχύει η σχέση $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε τα διανύσματα είναι παράλληλα. Δηλαδή $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

◆ Τώρα αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ είναι παράλληλα και έστω $\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} = \kappa$, τότε $|\vec{\alpha}| = \kappa |\vec{\beta}|$ με $\kappa \geq 0$.

◆ Άρα αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa \vec{\beta}$

◆ Άρα αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa \vec{\beta}$

◆ Ειδικά αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση υπάρχει λ , μοναδικός αριθμός (ιδιότητα iv), τέτοιος ώστε : $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$.

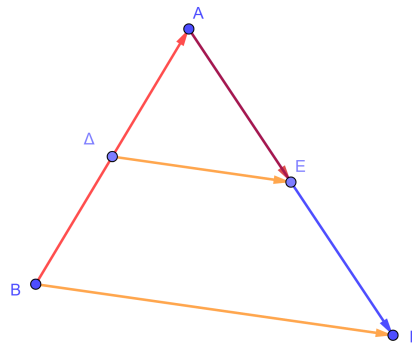
- π.χ. Στο παρακάτω σχήμα αν Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε :

$$\vec{B\Gamma} = \vec{B\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = 2\vec{\Delta\Delta} + 2\vec{\Delta E} = 2(\vec{\Delta\Delta} + \vec{\Delta E}) = 2\vec{\Delta E}$$

Άρα αφού $\vec{B\Gamma} = 2\vec{\Delta E}$, θα έχουμε $\vec{B\Gamma} \parallel \vec{\Delta E}$ και

$$\vec{B\Gamma} = 2\vec{\Delta E} \Rightarrow |\vec{B\Gamma}| = 2|\vec{\Delta E}|, \text{άρα } \Delta E = \frac{1}{2}B\Gamma$$

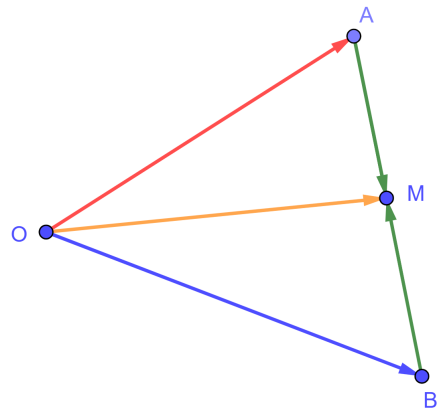
Συνεπώς ισχύει η γνωστή σχέση από την Γεωμετρία $\Delta E = \parallel \frac{B\Gamma}{2}$.



Διανυσματική-Ακτίνα-Μέσου-Τμήματος

Ας πάρουμε ένα διάνυσμα \vec{AB} και ένα σημείο αναφοράς O . Για τη διανυσματική ακτίνα \vec{OM} του μέσου M του τμήματος AB έχουμε:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\blacklozenge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \quad (1)$$

$$\blacklozenge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε :

$$2 \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}, \text{ όμως } \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BM}, \text{ άρα τελικά}$$

$$\text{θα έχουμε : } \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα μέσα των απέναντι πλευρών ενός τετραπλεύρου και τα μέσα των διαγωνίων του διέρχονται από το ίδιο σημείο και διχοτομούνται από το σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων A, B, Γ, Δ αντίστοιχα με σημείο αναφοράς O . Επίσης E μέσο του AB , H μέσο του $B\Gamma$, Z μέσο του $\Gamma\Delta$, Θ μέσο του $A\Delta$.

$$\blacklozenge \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \text{ και } \overrightarrow{OZ} = \frac{1}{2}(\vec{\gamma} + \vec{\delta}), \text{ συνεπώς το μέσο } G \text{ των}$$

σημείων E και Z θα έχει διανυσματική ακτίνα :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OZ}) \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}) \quad (1)$$

$$\blacklozenge \overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\vec{\gamma} + \vec{\beta}) \text{ και } \overrightarrow{O\Theta} = \frac{1}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\delta}), \text{ συνεπώς το μέσο } M \text{ των}$$

σημείων H και Θ θα έχει διανυσματική ακτίνα :

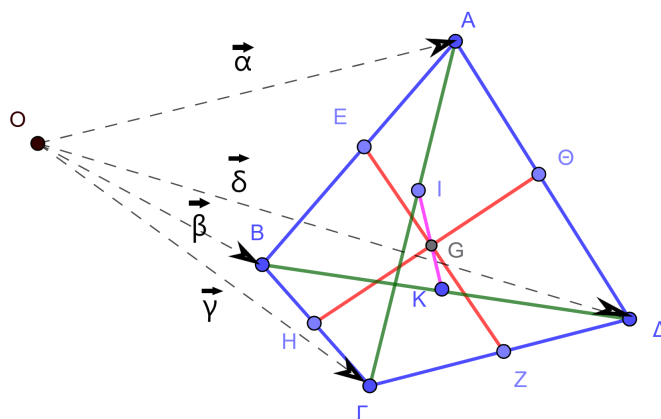
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{O\Theta}) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}) \quad (2)$$

$$\blacklozenge \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\gamma}) \text{ και } \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\vec{\beta} + \vec{\delta}), \text{ συνεπώς το μέσο } N \text{ των}$$

σημείων I και K θα έχει διανυσματική ακτίνα :

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OK}) \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}) \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία G, M, N ταυτίζονται και άρα το σημείο G είναι το κοινό μέσο των τμημάτων $EZ, H\Theta, IK$, άρα τα τμήματα αυτά διχοτομούνται από το σημείο G .



1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Άξονας

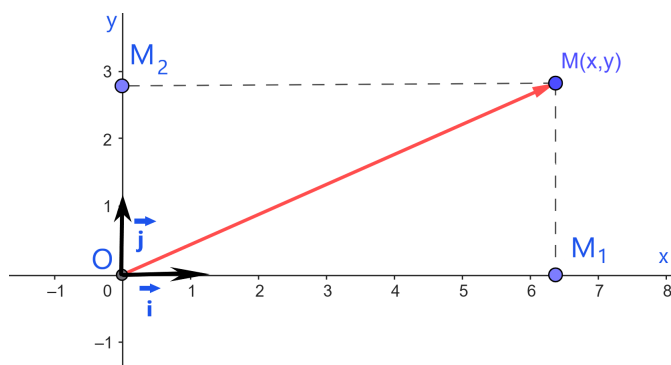
- Έχουμε έναν άξονα με αρχή το O και μοναδιαίο διάνυσμα το $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ και τον συμβολίζουμε με $x'x$.
- Η ημιευθεία Ox λέγεται **θετικός ημιάξονας** Ox , ενώ η ημιευθεία Ox' λέγεται **αρνητικός ημιάξονας** Ox' .
- Αν, τώρα, πάνω στον άξονα $x'x$ πάρουμε ένα σημείο M , επειδή $\overrightarrow{OM} \parallel \vec{i}$ θα υπάρχει **ακριβώς ένας** πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε $\overrightarrow{OM} = x \vec{i}$ τον αριθμό x τον ονομάζουμε **τετμημένη** του M .



- Επίσης μέσω της σχέσης $\overrightarrow{OM} = x \vec{i}$ σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχεί μοναδικό σημείο M στον άξονα $x'x$ με **τετμημένη** x . το οποίο συμβολίζουμε με $M(x)$.

Καρτεσιανό-Επίπεδο

- Πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παίρνουμε ένα σημείο M . Από το σημείο M φέρνουμε την παράλληλη στον $y'y$, που τέμνει τον $x'x$ στο σημείο M_1 και την παράλληλη στον $x'x$, που τέμνει τον $y'y$ στο σημείο M_2 .



- ◆ Αν x είναι η τετμημένη του M_1 ως προς τον άξονα $x'x$ και
- ◆ y η τετμημένη του M_2 ως προς τον άξονα $y'y$, τότε :
 - ο x λέγεται τετμημένη του M και
 - ο y τεταγμένη του M .
 - Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται συντεταγμένες του M .
- Αλλά και αντίστροφα σε κάθε ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχίζεται ένα ακριβώς σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου.

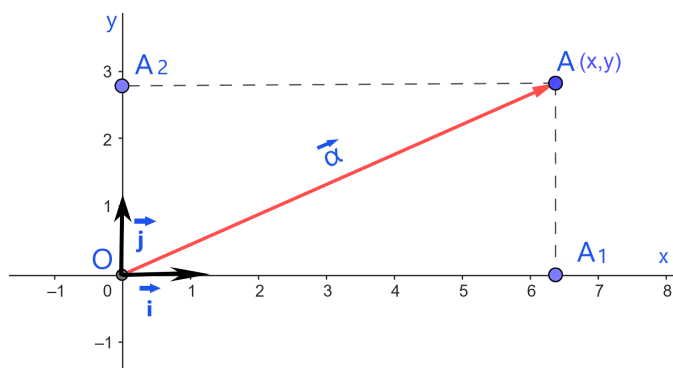
Συντεταγμένες-Διανύσματος

- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου.
- ◆ Με αρχή το O σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$.
 - Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε:

$$\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2$$

- Αν x, y είναι οι συντεταγμένες του A , τότε ισχύει $\vec{OA}_1 = x\vec{i}$ και $\vec{OA}_2 = y\vec{j}$ Επομένως:

$$\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



ΠΡΟΤΑΣΗ. Οι αριθμοί x και y στην σχέση :

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

,είναι μοναδικοί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

♦ Έστω ότι υπάρχουν x', y' με $x' \neq x$ και $y' \neq y$ τέτοια ώστε :

$$\vec{a} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

,τότε θα έχουμε : $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Leftrightarrow (x-x')\vec{i} = (y'-y)\vec{j}$

$\Leftrightarrow \vec{i} = \frac{y'-y}{x-x'}\vec{j}$, το οποίο είναι άτοπο, αφού γνωρίζουμε ότι $\vec{i} \nparallel \vec{j}$,
 άρα $x' = x$ και με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $y' = y$.

- Τα διανύσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος \vec{a} κατά τη διεύθυνση των \vec{i} και \vec{j}
- Οι αριθμοί x, y λέγονται **συντεταγμένες** του \vec{a} στο σύστημα Oxy . Πιο συγκεκριμένα, ο x λέγεται **τετμημένη** του \vec{a} και ο y λέγεται **τεταγμένη** του \vec{a} .
- Δύο διανύσματα είναι **ίσα** αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες.
- Καθένα από τα ίσα διανύσματα με τετμημένη x και τεταγμένη y , θα το συμβολίζουμε με το διατεταγμένο ζεύγος (x, y) .

Συντεταγμένες-Γραμμικού-Συνδυασμού-Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε:

$$\blacklozenge \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j}$$

$$\blacklozenge \lambda \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\lambda \vec{\alpha} = \lambda(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) = \lambda x_1 \vec{i} + \lambda y_1 \vec{j}$$

$$\blacklozenge \lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

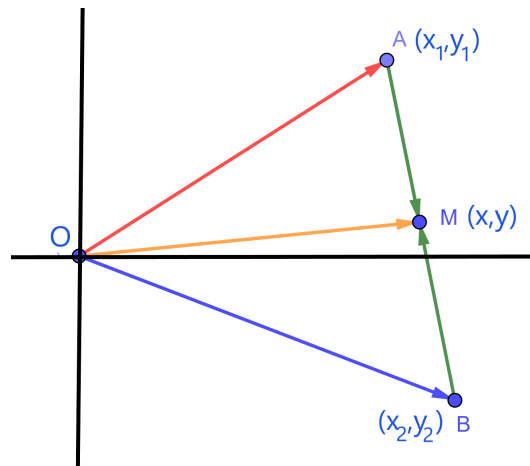
$$\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} = \lambda(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) + \mu(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) = (\lambda x_1 + \mu x_2) \vec{i} + (\lambda y_1 + \mu y_2) \vec{j}$$

π.χ. Αν $\vec{\alpha} = (1, -1)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$, τότε

$$2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2(1, -1) - (1, 2) = (2, -2) - (1, 2) = (2 - 1, -2 - 2) = (1, -4)$$

Συντεταγμένες-Μέσου-Τμήματος

◆ Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .



Ισχύουν οι σχέσεις :

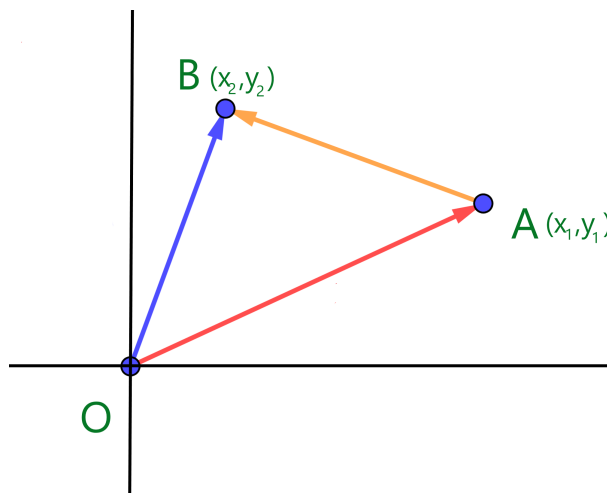
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γνωρίζουμε ότι για σημείο αναφοράς O , έχουμε : $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \Leftrightarrow (x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = \frac{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}{2}$

Συντεταγμένες-Διανύσματος-με-Γνωστά-Άκρα

◆ Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος \overrightarrow{AB} .



Ισχύουν οι σχέσεις :

$$x = x_2 - x_1 \quad , \quad y = y_2 - y_1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

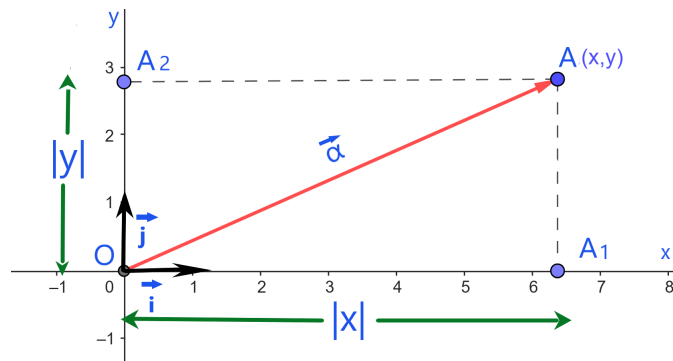
Γνωρίζουμε ότι για σημείο αναφοράς O ,έχουμε : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow (x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

π.χ. Αν έχουμε τα σημεία : $A(1, 2)$ και $B(3, 7)$,τότε

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 7) - (1, 2) = (3 - 1, 7 - 2) = (2, 5)$$

Μέτρο-Διανύσματος

- Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$ και A το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$.
- A_1, A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.
- Το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y ,άρα ισχύει $(OA_1) = |x|$ και $(OA_2) = |y|$.



Τότε :

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$,για το μέτρο του $|\vec{\alpha}|$ θα ισχύει :

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$|\vec{\alpha}|^2 = (OA)^2 = (OA_1)^2 + (A_1A)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2, \text{ άρα } |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

π.χ. Αν έχουμε

$$\vec{\alpha} = (5, 12) \Rightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

• Αν έχουμε τώρα δύο σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, τότε η απόσταση (AB) των δύο σημείων ισούται με το μέτρο του διανύσματος \overrightarrow{AB} , άρα :

$$(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\text{Εφόσον έχουμε } A(x_1, y_1) \text{ και } B(x_2, y_2), \text{ τότε } \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

π.χ. Αν έχουμε δύο σημεία $A(2, -7)$ και $B(5, -3)$, τότε η απόσταση των δύο σημείων θα είναι :

$$(AB) = \sqrt{(5 - 2)^2 + (-3 - (-7))^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1^η

Αν $A(-2, 1)$ και $B(1, 4)$ είναι οι δύο κορυφές του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$ και $K(2, -3)$ το κέντρο του, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ .

ΛΥΣΗ

Έστω $\Gamma(x_1, y_1)$ και $\Delta(x_2, y_2)$, εφόσον K κέντρο του παραλληλογράμμου θα έχουμε :

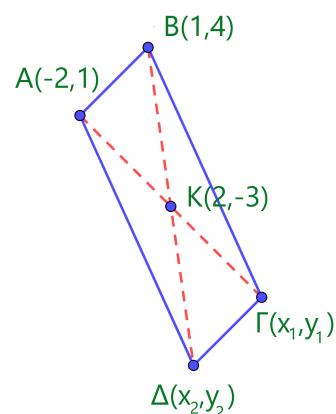
$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{-2 + x_1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 6 \text{ και } y_K =$$

$$\frac{y_A + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow -3 = \frac{1 + y_1}{2} \Leftrightarrow y_1 = -7, \text{ άρα } \Gamma(6, -7). \text{ Ο-}$$

$$\text{μοίως βρίσκουμε και το σημείο } \Delta, x_K = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 2 =$$

$$\frac{1 + x_2}{2} \Leftrightarrow x_2 = 3 \text{ και } y_K = \frac{y_B + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow -3 = \frac{4 + y_2}{2} \Leftrightarrow$$

$$y_2 = -10, \text{ άρα } \Delta(3, -10).$$



Συνθήκη-Παραλληλίας-Διανυσμάτων

ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

μ€ :

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

♦ Έστω $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε : $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Rightarrow$

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} \lambda x_2 & \lambda y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \lambda x_2 y_2 - \lambda x_2 y_2 = 0$$

- Τώρα αν $\vec{\beta} = (0, 0)$, τότε και πάλι $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \cdot 0 - y_1 \cdot 0 = 0$

♦ Αντίστροφα αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$, **(1)**

- Άρα αν $x_2 \neq 0 \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{x_2} y_2$ και αν θέσουμε $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$ θα έχουμε $y_1 = \lambda y_2$ και

$x_1 = \lambda x_2$, άρα $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

- Αν πάλι $x_2 = 0$, τότε από τη σχέση **(1)**, έχουμε

• $x_1 = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \parallel y'y$ και $\vec{\beta} \parallel y'y$ άρα $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ ή

• $y_2 = 0 \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν από τη σχέση **(1)** ξεκινούσαμε με την περίπτωση $y_2 \neq 0$ και μετά εξετάζαμε την περίπτωση $y_2 = 0$.

π.χ. • Τα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, -\sqrt{3})$ έχουν

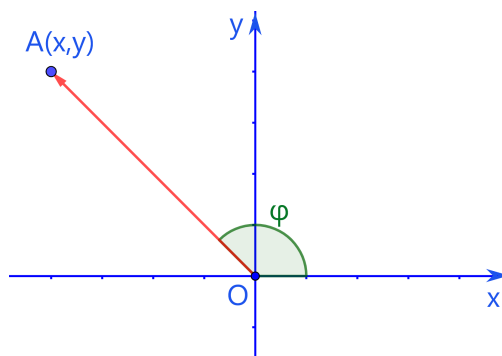
$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3}(-\sqrt{3}) - (-1) \cdot 3 = -3 + 3 = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}.$$

• Τα $\vec{\alpha} = (-\sqrt{3}, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, -\sqrt{3})$ έχουν

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) - (-1) \cdot 3 = 3 + 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}.$$

Συντελεστής-Διεύθυνσης-Διανύσματος

- Έστω $\vec{a} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει : $\vec{OA} = \vec{a}$.
 - Τη γωνία ϕ , που διαγράφει ο ημιιάξονας αν στραφεί γύρω από το O κατά τη **θετική φορά** μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA , την ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{a} με τον άξονα $x'x$.
- Είναι φανερό ότι : $0^\circ \leq \phi < 360^\circ$ ή σε ακτίνια : $0 \leq \phi < 2\pi$.



- Για τη γωνία ϕ , όπως είναι γνωστό από την Τριγωνομετρία, αν το $\vec{a} \parallel y'y$, ισχύει :

$$\epsilon\phi\phi = \frac{y}{x} = \lambda$$

,όπου λ ο **συντελεστής διεύθυνσης** του διανύσματος \vec{a} .

F Αν $y = 0$, δηλαδή αν $\vec{a} \parallel x'x$ τότε ο **συντελεστής διεύθυνσης** του διανύσματος \vec{a} είναι $\lambda = 0$

F Αν $x = 0$, δηλαδή αν $\vec{a} \parallel y'y$, τότε **δεν** ορίζεται **συντελεστής διεύθυνσης** του διανύσματος \vec{a} .

ΠΡΟΤΑΣΗ. (Συνθήκη παραλληλίας με συντελεστές διεύθυνσης)

Για τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με **συντελεστές διεύθυνσης** λ_1 και λ_2 αντιστοίχως ισχύει :

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0 \stackrel{x_1, x_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα σημεία $A(1, 0)$, $B(-\mu^2, 3)$ και $\Gamma(-5\mu, 9)$ είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

Εφόσον τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά θα ισχύει για τα διανύσματα

$$\overrightarrow{AB} = (-\mu^2 - 1, 3) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = (-5\mu - 1, 9) \text{ ότι : } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu^2 - 1 & 3 \\ -5\mu - 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-\mu^2 - 1)9 - 3(-5\mu - 1) = 0 \Leftrightarrow -9\mu^2 - 9 + 15\mu + 3 =$$

$$0 \Leftrightarrow -9\mu^2 + 15\mu - 6 = 0 \stackrel{:(-3)}{\Leftrightarrow} 3\mu^2 - 5\mu + 2 = 0$$

$$\text{Βρίσκουμε διακρίνουσα } \Delta = 25 - 24 = 1, \text{ άρα } \mu = \frac{5 + \sqrt{1}}{6} = 1 \text{ ή } \mu = \frac{5 - \sqrt{1}}{6} = \frac{2}{3}.$$

1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \phi$$

Άν $\vec{\alpha} = 0$ ή $\vec{\beta} = 0$ τότε : $\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = 0$

Όπου ϕ η **γωνία** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

π.χ. Αν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 8$ και $\phi = \frac{\pi}{3}$, τότε θα έχουμε :

$$\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \phi = 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

• Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής:

◆ $\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = \vec{\beta} \bullet \vec{\alpha}$

◆ Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = 0$ και αντιστρόφως.

◆ Αν $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

◆ Αν $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

• Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \bullet \vec{a}$ συμβολίζεται με \vec{a}^2 και λέγεται τετράγωνο του \vec{a} .

- Επίσης από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε :

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| = |\vec{a}|^2.$$

Αναλυτική-Έκφραση-Εσωτερικού-Γινομένου

Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ ισχύει:

Το **εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Δηλαδή :

$$\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

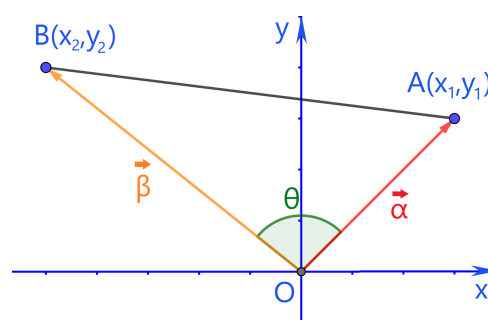
Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB έχουμε :

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\sigma\upsilon\nu\hat{A}\hat{O}\hat{B} \quad (1)$$

και ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία O, A, B είναι συνευθειακά.

Επίσης έχουμε :

♦ $(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, $(OA)^2 = x_1^2 + y_1^2$, $(OB)^2 = x_2^2 + y_2^2$, $\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = (OA)(OB)\sigma\upsilon\nu\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και με αντικατάσταση στη σχέση (1) το ζητούμενο έπεται.



π.χ. Αν $\vec{\alpha} = (-3, 4)$ και $\vec{\beta} = (2, -1)$ τότε θα έχουμε :

$$\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = -3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = -6 - 4 = -10$$

• Με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης του εσωτερικού γινομένου θα αποδείξουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$$\blacklozenge \lambda \vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = \vec{\alpha} \bullet (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε :

$$- \lambda (\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta}) = \lambda (x_1 x_2 + y_1 y_2) = \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 \quad (1)$$

$$- \lambda \vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1) \bullet (x_2, y_2) = \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 \quad (2)$$

$$- \vec{\alpha} \bullet (\lambda \vec{\beta}) = (x_1, y_1) \bullet (\lambda x_2, \lambda y_2) = \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3), το ζητούμενο έπεται.

$$\blacklozenge \vec{\alpha} \bullet (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} + \vec{\alpha} \bullet \vec{\gamma} \quad (\text{επιμεριστική ιδιότητα})$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$, τότε :

$$- \vec{\alpha} \bullet (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (x_1, y_1) \bullet (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + y_1 y_2 + y_1 y_3 \quad (1)$$

$$- \vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} + \vec{\alpha} \bullet \vec{\gamma} = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 x_3 + y_1 y_3) = \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), το ζητούμενο έπεται.

$$\blacklozenge \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1 \quad \text{όπου } \lambda_1 \text{ ο συντελεστής διεύθυνσης του } \vec{\alpha} \text{ και } \lambda_2 \text{ ο συντελεστής διεύθυνσης του } \vec{\beta} \text{ και } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \nparallel y'y.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \bullet \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \stackrel{y_1 y_2}{\Leftrightarrow} \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2} + \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1.$$

Συνημίτονο-Γωνίας-δύο-Διανυσμάτων

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα και θ η γωνία τους, τότε :

$$\cos\theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, αφού η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δίνει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$ και από τον ορισμό του μέτρου διανύσματος έχουμε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

π.χ. Αν έχουμε $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 1)$, τότε

$$\cos\theta = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1^η

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, να αποδειχτεί ότι :

- ι. $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$
- ιι. $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \leq \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$

Πότε ισχύουν οι ισότητες ;

ΛΥΣΗ

ι. $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos\theta| = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos\theta \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$, όπου θ η γωνία τους.

$$ii. (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|^2 \leq (|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|)^2 = |\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$$

Οι ισότητες και στις δύο περιπτώσεις *i.* και *ii.* ισχύουν όταν $|\cos\theta| = 1$, άρα όταν $\cos\theta = 1$ ή $\cos\theta = -1$, άρα όταν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, δηλαδή όταν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2^η

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν μέτρα $\sqrt{3}$ και 1 αντίστοιχα και σχηματίζουν γωνία $\phi = \frac{\pi}{6}$. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{y} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

ΛΥΣΗ

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 3 - 1 = 2$$

$$|\vec{x}|^2 = \vec{x}^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 + 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 7$$

,άρα $|\vec{x}| = \sqrt{7}$

$$|\vec{y}|^2 = \vec{y}^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 + 1 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 1$$

,άρα $|\vec{y}| = \sqrt{1} = 1$

$$\cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = \frac{2}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \text{ όπου } \theta \text{ η γωνία των } \vec{x} \text{ και } \vec{y}, \text{ την οποία βρίσκουμε από τριγωνομετρικούς πίνακες.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3^η

Να αποδειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$, όπου $0 \leq \beta < \alpha \leq \pi$.

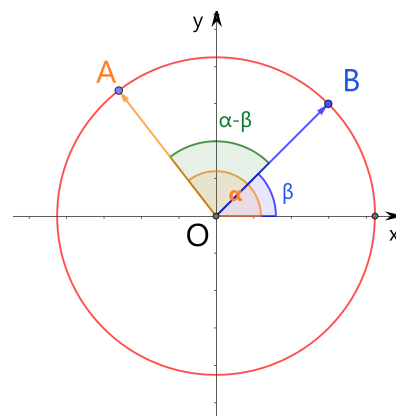
ΛΥΣΗ

Στον τριγωνομετρικό κύκλο παίρνουμε τα μοναδιαία διανύσματα \vec{OB}, \vec{OA} με $\vec{OB} = (\sigma\upsilon\nu\beta, \eta\mu\beta)$, $\vec{OA} = (\sigma\upsilon\nu\alpha, \eta\mu\alpha)$

$$\vec{OA} \bullet \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| (\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)) = 1 \cdot 1 \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \quad (1)$$

$$\vec{OA} \bullet \vec{OB} = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4^η

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, 1)$ και $\vec{v} = (1, 2)$. Να αναλυθεί το \vec{v} σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο \vec{a} .

ΛΥΣΗ

$$\text{Έστω } \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (1) \quad \text{με } \vec{v}_1 \parallel \vec{a}$$

$$\text{Άρα } \vec{v}_1 = \lambda \vec{a} = (3\lambda, \lambda)$$

$$\text{Έστω } \vec{v}_2 = (x, y), \text{ αφού } \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 =$$

$$0 \Rightarrow \vec{v} \bullet \vec{v}_1 = 0 + \vec{v}_1^2 \Rightarrow 1 \cdot 3\lambda + 2 \cdot \lambda = 9\lambda^2 + \lambda^2 \Rightarrow$$

$$10\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(2\lambda - 1) =$$

$$0 \stackrel{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } \vec{v}_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ και από τη σχέση (1), έχουμε}$$

$$\therefore \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = (1, 2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

