

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1<sup>ο</sup> κεφάλαιο

## ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3<sup>ο</sup>

## ΕΩΣ ΚΑΙ ΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ Α'

[A<sub>1</sub>] Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ ; MON : 5

[A<sub>2</sub>] Να αποδείξετε ότι αν  $f \downarrow \Delta_1$  και  $g \uparrow \Delta_2$ , με  $\Delta_1, \Delta_2$  διαστήματα, τότε εφόσον ορίζεται η συνάρτηση  $f \circ g$  θα είναι γνησίως φθίνουσα. MON : 4

[A<sub>3</sub>] Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ (x - \frac{\pi}{2})^2 & , x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ .

και να περιγράψετε τη μονοτονία της στα αντίστοιχα διαστήματα του πεδίου ορισμού της με τη βοήθεια της  $C_f$ . MON : 6

[A<sub>4</sub>] Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ανάλογα, με τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**

α. Αν  $f \uparrow \Delta_1$  και  $f \uparrow \Delta_2$ , τότε  $f \uparrow \Delta_1 \cup \Delta_2$   MON : 2

β. Αν  $f \circ g \uparrow \mathbb{R}$  και  $f \uparrow \mathbb{R}$  και  $g$  ορίζεται στο  $\mathbb{R}$ , τότε  $g \uparrow \mathbb{R}$ .   
MON : 2

γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $|f|$  βρίσκεται πάντα πάνω από τον άξονα  $x'x$ , με την προϋπόθεση ότι ορίζεται η συνάρτηση  $f$ .  MON : 2

δ. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f$  έχει ακριβώς ένα σημείο τομής με τον άξονα  $x'x$ .  MON : 2

ε. Αν  $f = g$ , τότε έχουν τον ίδιο τύπο.  MON : 2

## ΘΕΜΑ Β'

[B<sub>1</sub>] Να βρείτε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων αιτιολογώντας πλήρως την απαντησή σας.

i.  $f(x) = \ln(x - 1)$  MON :5

ii.  $g(x) = x^2 - 9x + 20$  MON :5

iii.  $h(x) = f(x) - g(x)$  με  $x \in (1, \frac{9}{2}]$  MON :5

[B<sub>2</sub>] Έστω η συνάρτηση  $g$  του ερωτήματος [B<sub>1</sub>ii.]

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $\phi$  με  $\phi(x) = g(x) - 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με όποιο τρόπο θέλετε. MON :5

ii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $\phi(x) = \alpha$  για κάθε τιμή του  $\alpha$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ . MON :5

## ΘΕΜΑ Γ'

[Γ<sub>1</sub>] Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \leq 0 \\ x^2 - 1 & , x > 0 \end{cases}$ .

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  στα διαστήματα  $(-\infty, 0]$  και  $(0, +\infty)$ , χωρίς τη βοήθεια της  $C_f$ . MON :6

ii. Είναι η συνάρτηση  $f$  γνησίως μονότονη στο  $A_f$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας χωρίς τη βοήθεια της  $C_f$ . MON :6

iii. Να σχεδιάσετε τη  $C_f$ . MON :4

[Γ<sub>2</sub>] Έστω η συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = \begin{cases} |x| & , x \leq 1 \\ \ln x & , x > 1 \end{cases}$ .

i. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f \circ g$ . MON :6

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f - g$ . MON :3

## ΘΕΜΑ Δ'

Έστω οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  για τις οποίες για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει η σχέση :

$$f^5(x) + f(x) = g(x) \quad (1)$$

$$\text{, όπου } g(x) = \begin{cases} -|x| & , x \leq 0 \\ e^x & , x > 0 \end{cases}$$

[ $\Delta_1$ ] Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα ,χωρίς τη βοήθεια της  $C_g$ . MON :7

[ $\Delta_2$ ] Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης  $f$ . MON :9

[ $\Delta_3$ ] Να βρείτε το  $f(0)$  και το πρόσημο της συνάρτησης  $f$  και επίσης να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $|g|$ . MON :9

## ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ

| ΘΕΜΑ Α'         | ΘΕΜΑ Β'         | ΘΕΜΑ Γ'         | ΘΕΜΑ Δ'         | ΣΥΝΟΛΟ           |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| $\overline{25}$ | $\overline{25}$ | $\overline{25}$ | $\overline{25}$ | $\overline{100}$ |

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΤΗΣΕΙΣ :

