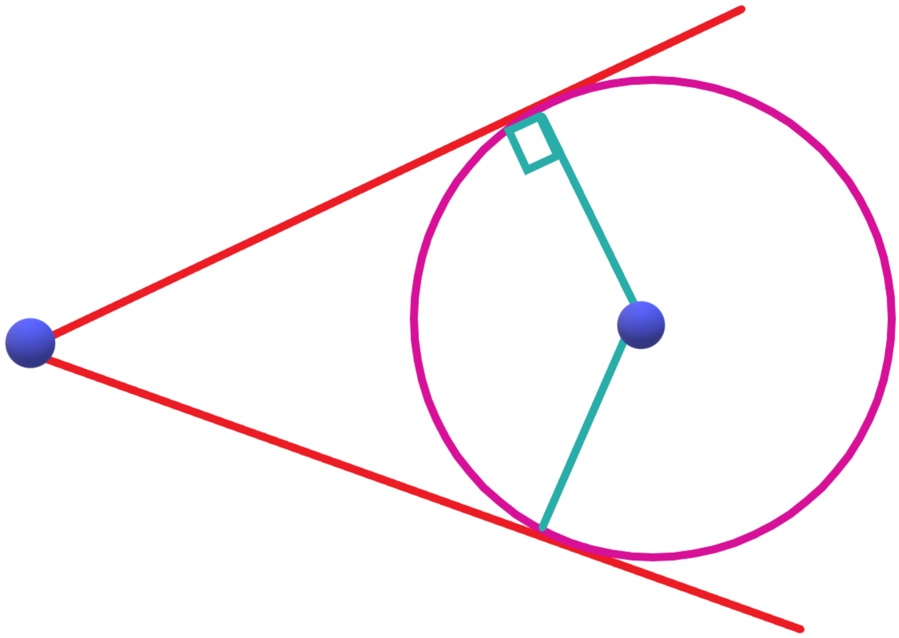
Θεωρία

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Τζίκας Αριστοτέλης ● μαθηματικός

Το παρόν βιβλίο περιέχει :

- Όλη τη θεωρία με κενά για να συμπληρώσετε και επιλεγμένες εφαρμογές από το σχολικό βιβλίο για να λύσετε ,έτσι ώστε να κάνετε μία πλήρη επανάληψη της θεωρίας και των βασικών ασκήσεων.

Εύχομαι να βοηθήσει στο διαβασμά σας !!!

ΤΖΙΚΑΣ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

www.captainmathblog.centerplay.gr

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 3

ΤΡΙΓΩΝΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία-Γεωμετρία 3^o κεφάλαιο

ΤΡΙΓΩΝΑ

3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

• Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων: το σκαληνό, το ισοσκελές και το ισόπλευρο.Έτσι, ένα τρίγωνο λέγεται:

i. σκαληνό ....

ii. ισοσκελές ....

iii. ισόπλευρο ....

• Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται

i. οξυγώνιο ....

ii. ορθογώνιο ....

iii. αμβλυγώνιο ....

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

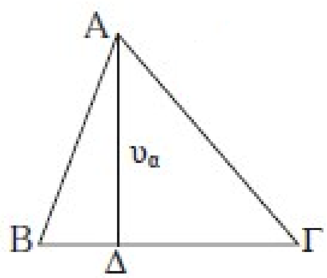
i. Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται ....

....

ii. Διχοτόμος ενός τριγώνου λέγεται ....
....

iii. Ύψος ενός τριγώνου λέγεται ....
....

• Στο σχήμα το $A\Delta$ είναι το ύψος από την κορυφή A. Το σημείο Δ λέγεται .... του A πάνω στην ευθεία $B\Gamma$ ή και ίχνος της καθέτου, που φέρεται από το A στην ευθεία $B\Gamma$.



• Δύο **ίσα τρίγωνα** έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους .... μία προς μία.
• Σε δύο **ίσα τρίγωνα** απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες .... και αντίστροφα.

3.2 1^o Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ. *(1^o Κριτήριο – ΠΓΠ)*
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις .... σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

....

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Σε κάθε* ***ισοσκελές τρίγωνο****:*

i. Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι . . . .

ii. Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι . . . . *και* . . . .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i.

ii.

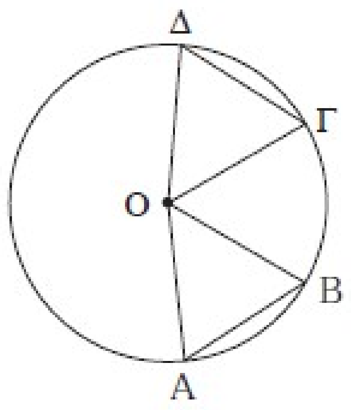
ΠΟΡΙΣΜΑ. *Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι* . . . .

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε σημείο της* ***μεσοκαθέτου*** *ενός ευθύγραμμου τμήματος .... από τα άκρα του.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ....*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



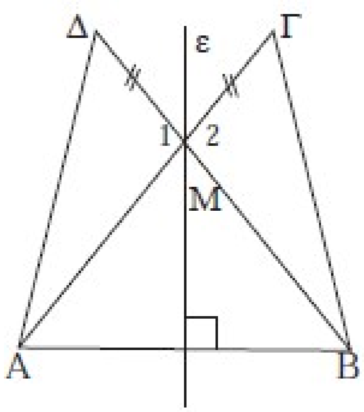
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB, η μεσοκάθετός του ε και σημείο Μ της ε. Στις προεκτάσεις των ΑΜ και ΒΜ προς το Μ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Δ, ώστε ΜΓ = ΜΔ. Να αποδείξετε ότι :

i. $\boldsymbol{M\widehat{A}B = M\widehat{B}A}$

ii. $\boldsymbol{A\Delta = B\Gamma}$

ΛΥΣΗ



3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ. *(2ο Κριτήριο – ΓΠΓ)*
Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις .... σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ. *(3ο Κριτήριο – ΠΠΠ)*
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις .... τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι .... και ύψος.*

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη .... του.*

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

• Άρα η **μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος** είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που .... από τα άκρα του τμήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ....*

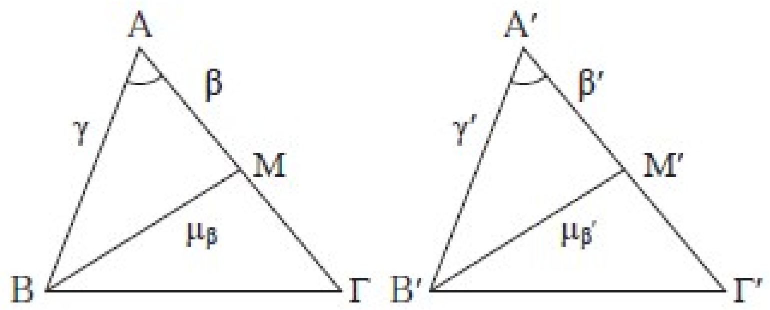
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΛΥΣΗ



3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται . . . . κάθετος στην ευθεία.*

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

• Δύο **ορθογώνια τρίγωνα**, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

• Δύο **ορθογώνια τρίγωνα**, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία . . . . γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.*

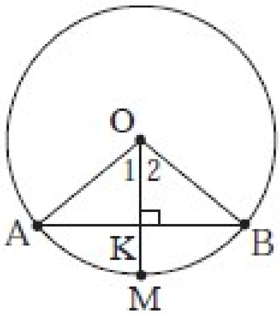
ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία . . . . πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.*

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι . . . . και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις **ισότητας ορθογώνιων τριγώνων** διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

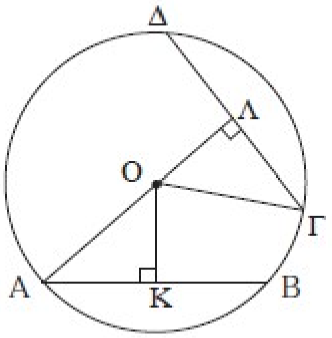
Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν :

• Δύο .... πλευρές τους ίσες μία προς μία.

• Μία πλευρά και την .... σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

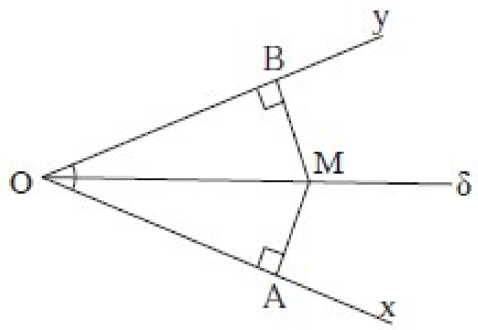
ΘΕΩΡΗΜΑ. *Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα .... τους είναι ίσα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που .... από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Η **διχοτόμος μιας γωνίας** είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που .... από τις πλευρές της.

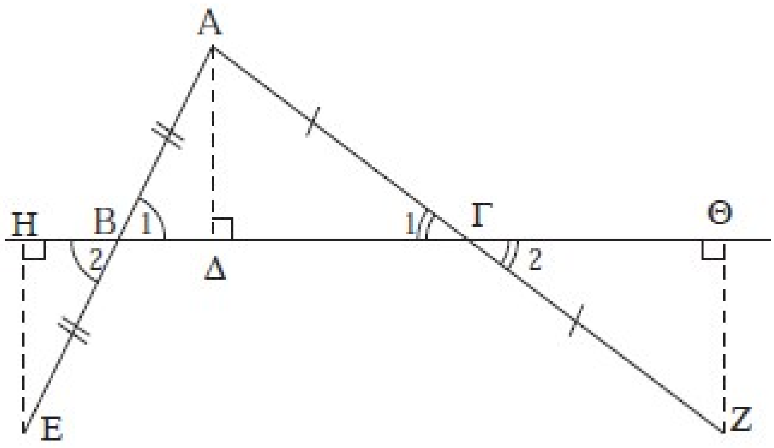
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε ΓΖ=ΑΓ. Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου και ΕΗ, ΖΘ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία ΒΓ, τότε :

i. να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ, καθώς και τα ΑΓΔ και ΖΓΘ

ii. να αποδειχθεί ότι ΕΗ = ΖΘ.

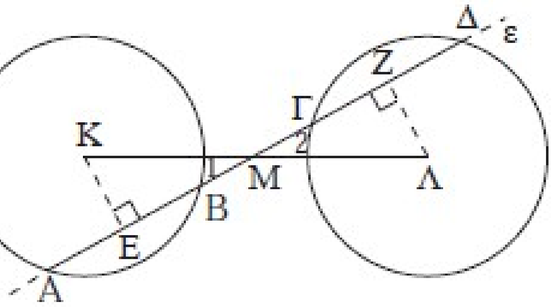
ΛΥΣΗ



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ, Λ και από το μέσο Μ του ΚΛ ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΓΔ.

ΛΥΣΗ



3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος

• **Γεωμετρικός τόπος** λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) **χαρακτηριστική ιδιότητα**.

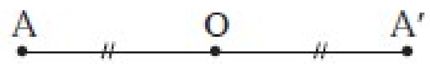
✦ Άρα **κύκλος** είναι ένας .... τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.

✦ Άρα **μεσοκάθετος ενός τμήματος** είναι επίσης ένας .... τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να .... από τα άκρα του τμήματος.

✦ Άρα η **διχοτόμος μιας γωνίας** είναι ένας άλλος .... τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) .... από τις .... της γωνίας.

....

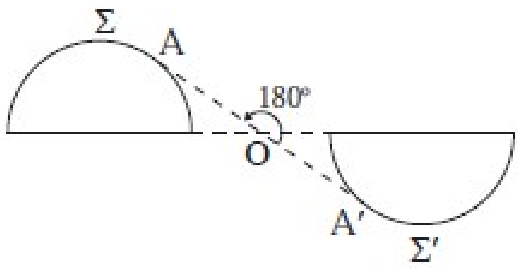
3.8 Κεντρική συμμετρία



Δύο σημεία Α,Α′ λέγονται **συμμετρικά ως προς κέντρο ένα σημείο Ο** όταν :

$i.$ $AO = OA'$

$ii.$ τα A, A', O είναι ....
....



Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ′ λέγονται **συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο** , αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ′ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το Ο και αντίστροφα.

• Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο συμμετρίας** του σχήματος ,που αποτελείται από τα συμμετρικά ως προς το Ο σχήματα Σ και Σ′.

• Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **κεντρική συμμετρία.**

• Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ, με κέντρο συμμετρίας το Ο κατά $\mathbf{180^0}$ γύρω από το Ο, θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.

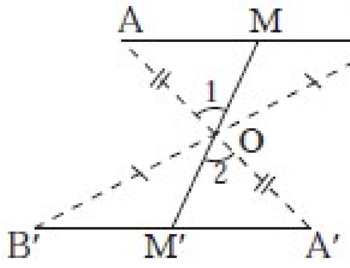
✦ Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του.
✦ Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας οποιοδήποτε σημείο της.
✦ Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

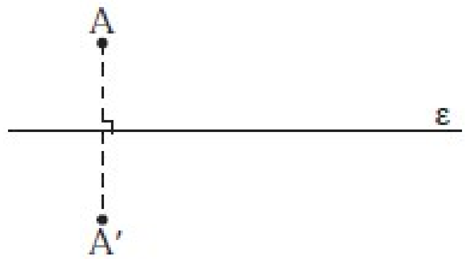
Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως προς σημείο Ο που δεν ανήκει στο φορέα του ,είναι τμήμα ίσο με αυτό.

ΛΥΣΗ

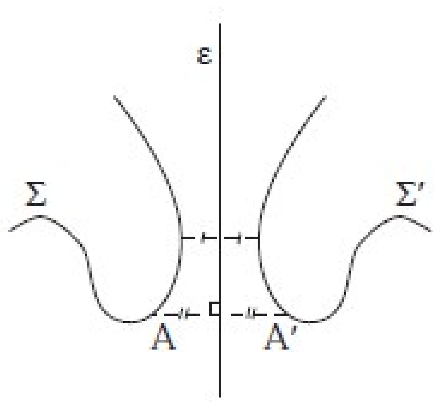
....



3.9 Αξονική συμμετρία



Δύο σημεία Α, Α′ λέγονται **συμμετρικά ως προς (άξονα) την ευθεία ε** ,όταν η ε είναι .... του τμήματος AA'



Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ′ λέγονται **συμμετρικά ως προς την ευθεία ε** ,αν και μόνον αν κάθε σημείο του Σ′ είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα.
Η ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας** του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ′.

• Μια ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας ενός σχήματος** ,όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α′ ,ως προς την ε ,**είναι επίσης σημείο του σχήματος.**

• Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **αξονική συμμετρία.**
Από τα γνωστά μας σχήματα :

....

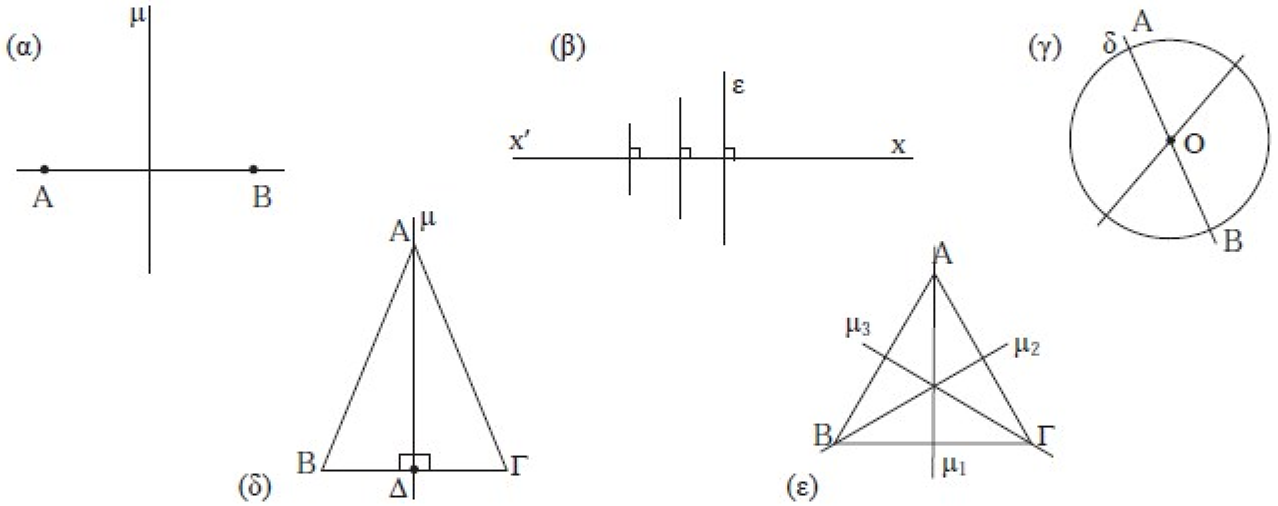
✦ Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετό του μ και τον φορέα του ε.

✦ Η ευθεία $x'x$ έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία ε $\perp$ $x'x$ και την ίδια τη $x'x$.

✦ Ο κύκλος έχει άξονα συμμετρίας το φορέα δ κάθε διαμέτρου του ΑΒ .

✦ Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) έχει άξονα συμμετρίας το φορέα μ του ύψους ΑΔ.

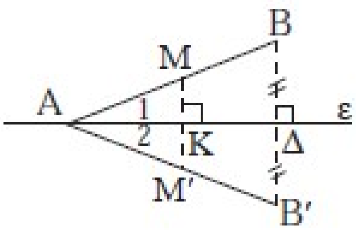
✦ Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω μια ευθεία ε και ένα τμήμα ΑΒ του οποίου το ένα άκρο Α είναι σημείο της ε.
Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς την ε είναι το τμήμα ΑΒ′ ίσο με το ΑΒ, όπου Β′ το συμμετρικό του Β ως προς την ε.

ΛΥΣΗ



3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις .... γωνίες του τριγώνου.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

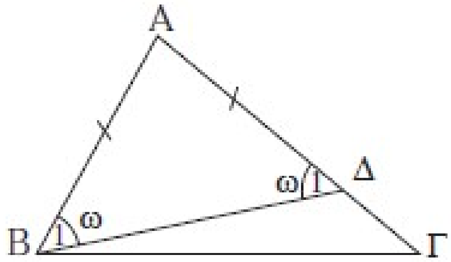
ΠΟΡΙΣΜΑ. *i. Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία .... ή ....*

ii. Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι .... των 180^0.

3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Σε κάθε τρίγωνο .... από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



ΠΟΡΙΣΜΑ. *i. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η .... πλευρά του τριγώνου.*

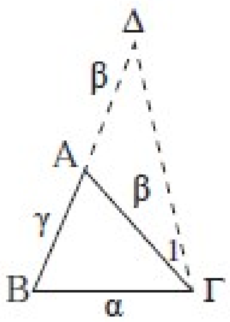
ii. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ....

iii Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ....

3.12 Τριγωνική ανισότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το .... των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη .... τους.*

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



• Άρα αν υποθέσουμε ότι το μήκος της πλευράς ΑΓ ,δηλαδή το β είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το γ δηλαδή το μήκος της πλευράς ΑΒ τότε σύμφωνα με τη **τριγωνική ανισότητα** θα έχουμε :

$$\boldsymbol{\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma \quad , \beta \geq \gamma}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της ....*

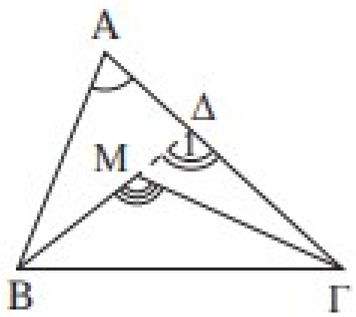
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι :

i. $\widehat{B M \Gamma} > \hat{A}$

ii. $MB + M\Gamma < AB + A\Gamma$

ΛΥΣΗ



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις :

i. το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος

ii. το τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος

iii. το τμήμα ΑΔ είναι ύψος

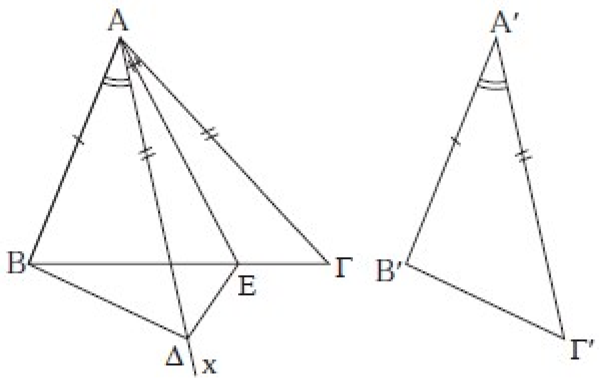
τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.

ΛΥΣΗ



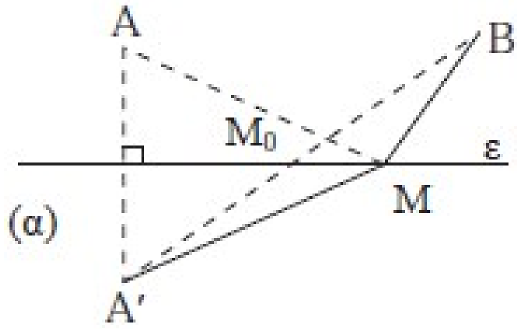
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

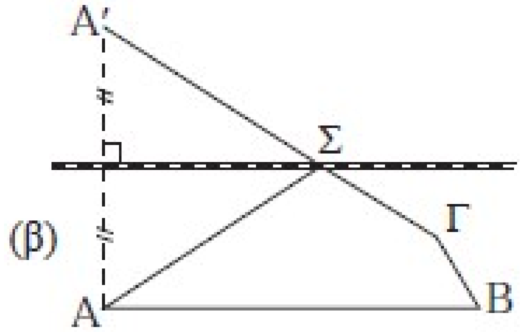
Δίνεται μια ευθεία ε ,δύο σημεία Α,Β προς το ίδιο μέρος της και το συμμετρικό Α′ του Α ως προς την ε.

i. Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ε, να αποδειχθεί ότι $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.
Πότε το άθροισμα ΜΑ+ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή ;

ii. Στα σημεία Α, Β, Γ (σχ.β) βρίσκονται τρεις κωμοπόλεις. Κοντά σε αυτές διέρχεται σιδηροδρομική γραμμή, πάνω στην οποία πρόκειται να κατασκευασθεί σταθμός Σ.
Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευασθεί ο σταθμός, ώστε ο δρόμος ΑΣΓΒ να είναι ο ελάχιστος δυνατός ;

ΛΥΣΗ



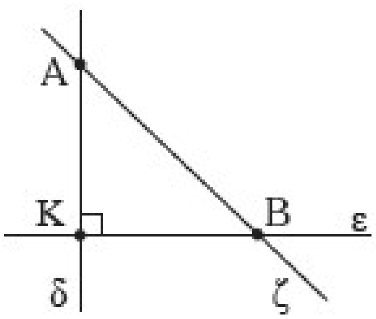


3.13 Κάθετες και πλάγιες

• Έστω μια ευθεία ε και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α φέρουμε προς την ε την κάθετο δ και μια πλάγια ζ.
Οι ευθείες δ και ζ τέμνουν την ε στα Κ και Β αντίστοιχα.

✦ Το Κ λέγεται **προβολή** του Α πάνω στην ε ή **ίχνος** της καθέτου δ πάνω στην ε.

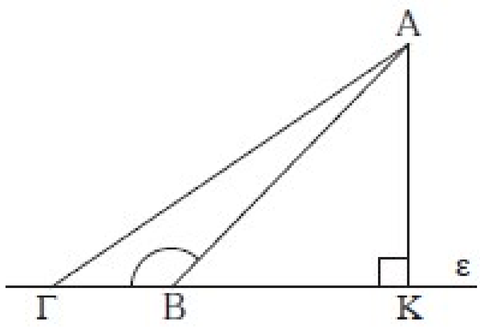
✦ Το Β λέγεται **ίχνος** της ευθείας ζ ή του τμήματος ΑΒ πάνω στην ε.



ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους .... από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.*

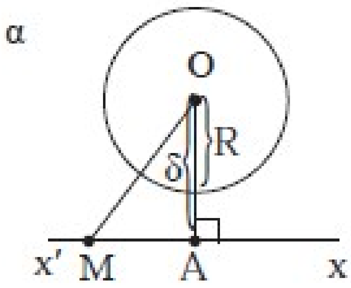
ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:*
i. Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.
ii. Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

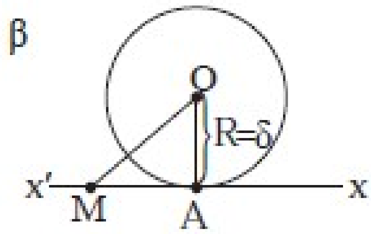
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

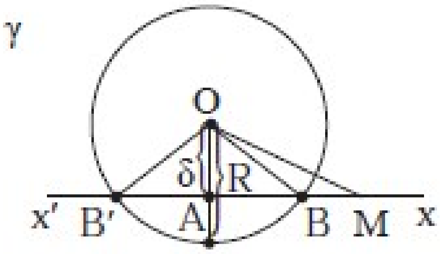


3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Οι σχετικές θέσεις μιας ευθείας και ενός κύκλου ,δεδομένου ότι $\delta =$ η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία και $R =$ η ακτίνα του κύκλου είναι :

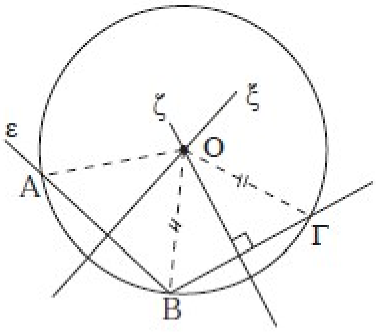






ΘΕΩΡΗΜΑ. *Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

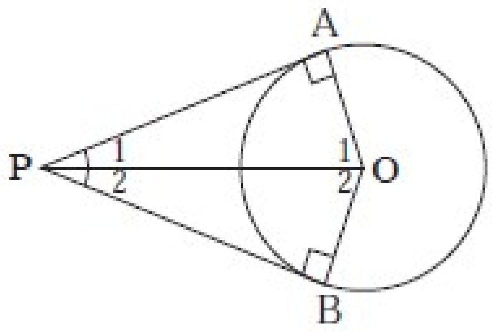


3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι .... μεταξύ τους.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

....



ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του :*

i. είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής

ii. διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

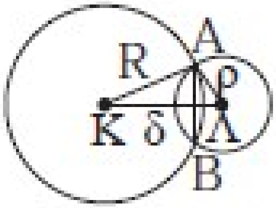
3.16 Σχετικές θέσεις δυο κύκλων

• Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων ;

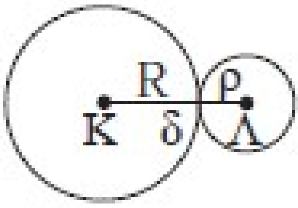
(α)

(β)

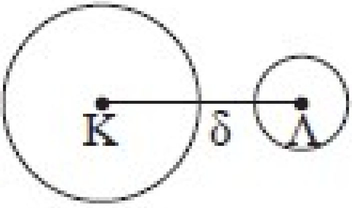
(γ)



(δ)

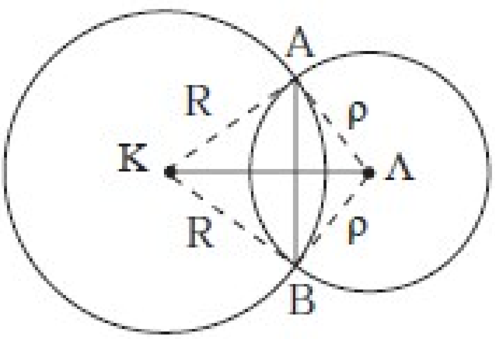


(ε)



ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι .... της κοινής χορδής τους.*
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



....

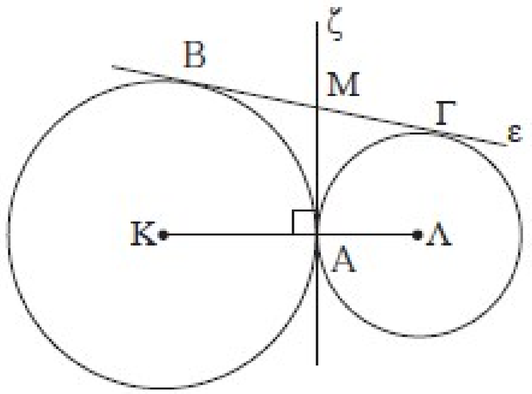
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Μία ευθεία ε εφάπτεται και στους δύο κύκλους στα Β, Γ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι :

i. **Η εφαπτομένη ζ του ενός κύκλου στο Α είναι και εφαπτομένη του άλλου.**

ii. **Η ευθεία ζ διχοτομεί το τμήμα ΒΓ.**

ΛΥΣΗ



Κεφάλαιο 4

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

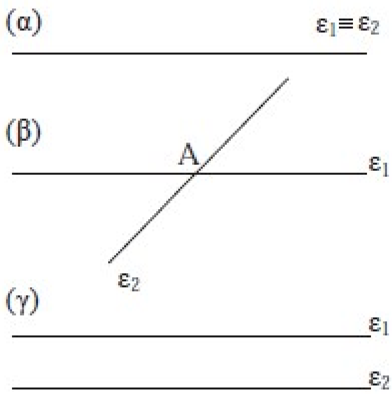
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία-Γεωμετρία 4^o κεφάλαιο

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

4.1 Εισαγωγή

Οι σχετικές θέσεις δυο ευθειών ε_1 και ε_2, οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:



i. ....

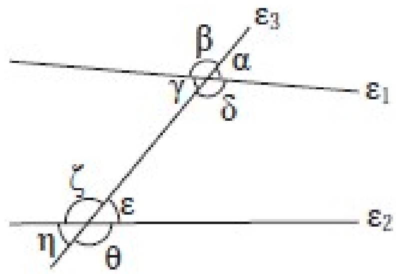
ii. ....

iii. ....

• Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται .... ευθείες. Συμβολίζουμε με $\varepsilon_1 \ldots\ldots \varepsilon_2$

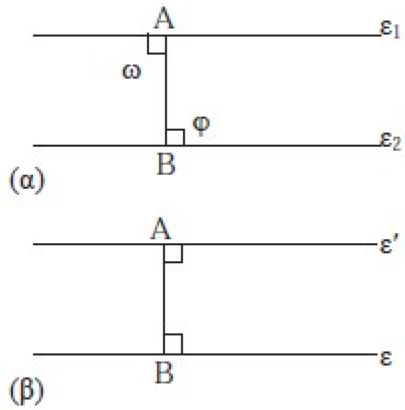
4.2 Τέμνουσα δυο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι* ....



ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι* . . . .

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους* . . . .



ΑΙΤΗΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

Ιδιότητες παράλληλων ευθειών

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες* . . . .

. . . .

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν :*

i. τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες . . . .

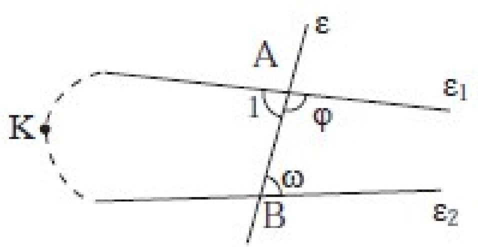
ii. τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες . . . .

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν δυο διαφορετικές ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ϵ, τότε είναι και μεταξύ τους . . . . , δηλαδή αν $\epsilon_1 \parallel \epsilon$ και $\epsilon_2 \parallel \epsilon$, τότε . . . . . . $\parallel$ . . . . . .*

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν δυο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ϵ τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ϵ θα . . . . και την άλλη.*

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες ,τότε είναι . . . . και στην άλλη.*

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.*



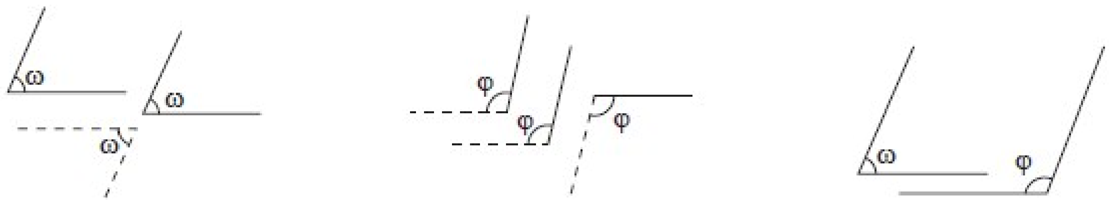
4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

- Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους, μία προς μία παράλληλες :

i. Αν και οι δυο γωνίες είναι οξείες τότε είναι . . . .

ii. Αν και οι δυο γωνίες είναι αμβλείες τότε είναι . . . .

iii. Αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία τότε είναι
. . . .



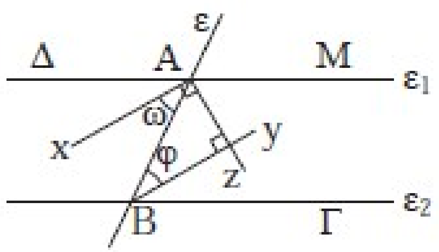
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ε_1 και ε_2 δυο παράλληλες που τέμνονται από ευθεία ε.Να αποδειχθεί ότι :

i. **Οι διχοτόμοι δυο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.**

ii. **Οι διχοτόμοι δυο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.**

ΛΥΣΗ



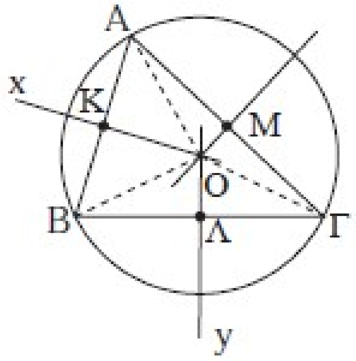
. . . .

4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.*

• Το σημείο αυτό λέγεται .... και ο κύκλος λέγεται

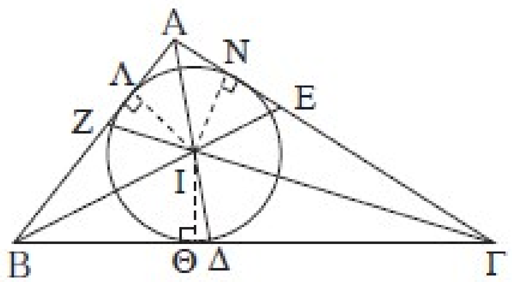
....



ΘΕΩΡΗΜΑ. *Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.*

• Το σημείο αυτό λέγεται .... και ο κύκλος λέγεται

....

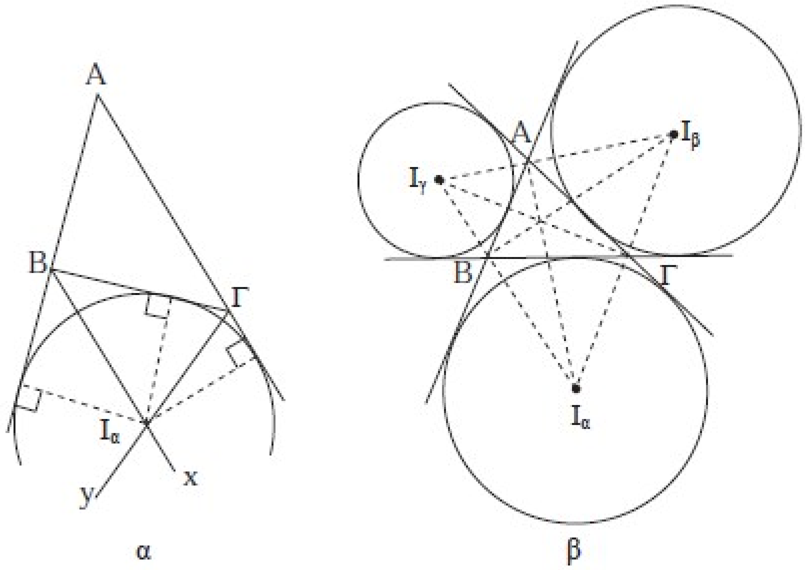


• Οι διχοτόμοι δυο εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου και η ημιευθεία που διχοτομεί την τρίτη γωνία του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δυο άλλων.

....

• Το σημείο αυτό λέγεται .... και ο κύκλος λέγεται

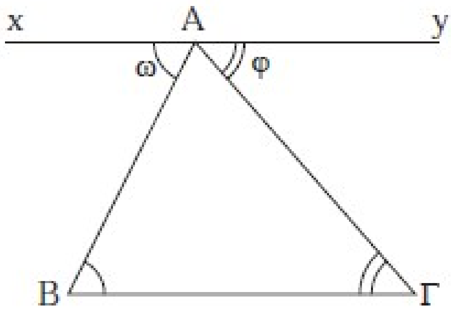
....



4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.*

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



....

ΠΟΡΙΣΜΑ. *i.* *Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο .... εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.*

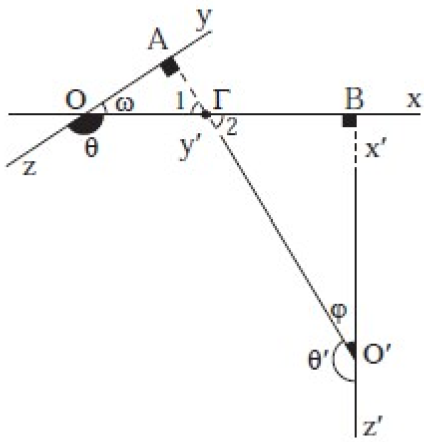
ii. *Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες .... τους ίσες.*

iii. *Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι ....*

iv. *Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι ....*

4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Δυο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ....*



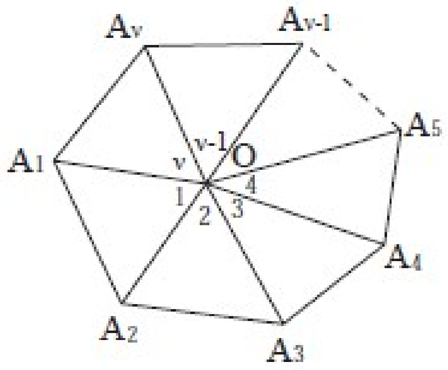
ΠΟΡΙΣΜΑ. *i.* *Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ....*

ii. *Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι ....*

4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

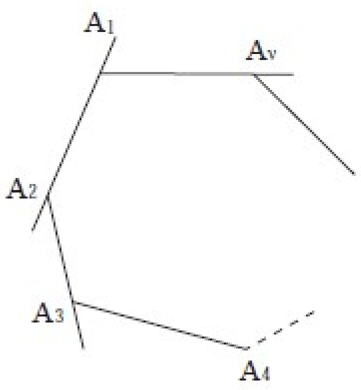
Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου να είναι $2\nu - 4$ ορθές.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



ΠΟΡΙΣΜΑ. *Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές.*

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u>

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τη διχοτόμο Ax της εξωτερικής γωνίας Α του τριγώνου.
Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν $Ax \parallel B\Gamma$.

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

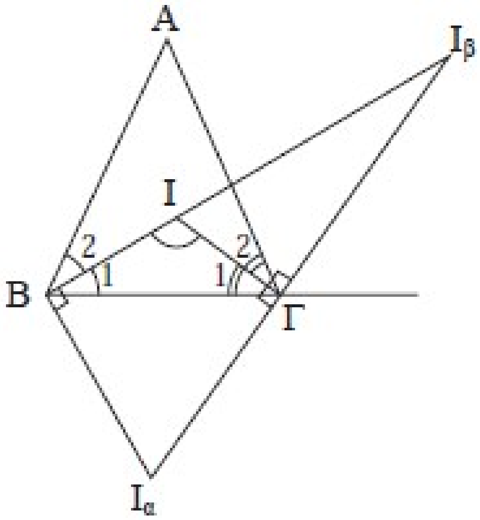
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τις εσωτερικές και εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών του B και Γ.
Να αποδειχθεί ότι :

i. Η γωνία των δυο εσωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90^0 + \dfrac{\hat{A}}{2}$

ii. Η γωνία μίας εσωτερικής και μίας εξωτερικής διχοτόμου είναι ίση με $\dfrac{\hat{A}}{2}$

iii. Η γωνία των δυο εξωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90^0 - \dfrac{\hat{A}}{2}$

ΛΥΣΗ



Κεφάλαιο 5

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία-Γεωμετρία 5^o κεφάλαιο

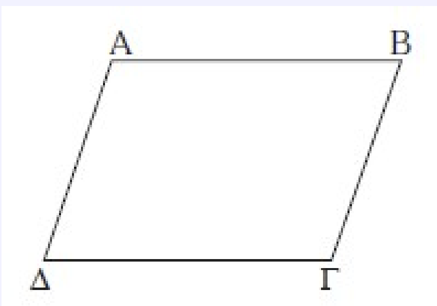
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ-ΤΡΑΠΕΖΙΑ

5.1 Εισαγωγή

• Το τετράπλευρο που έχει δύο μόνον πλευρές παράλληλες λέγεται ...., ενώ το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται ....

5.2 Παραλληλόγραμμο

ΟΡΙΣΜΟΣ. ***Παραλληλόγραμμο*** *λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις .... πλευρές του παράλληλες.*



Ιδιότητες παραλληλογράμμων

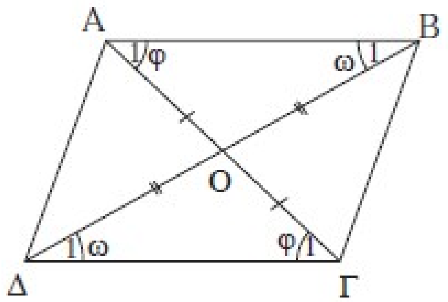
i. Οι απέναντι πλευρές του είναι ....

ii. Οι απέναντι γωνίες του είναι ....

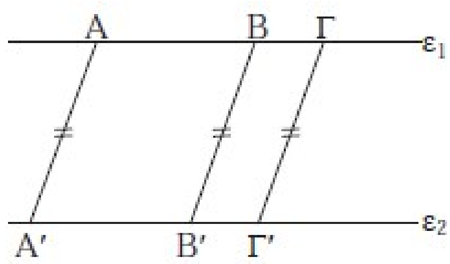
iii. Οι διαγώνιοί του ....

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι .... συμμετρίας του.*



ΠΟΡΙΣΜΑ. *Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ....*



Κριτήρια για παραλληλόγραμμα

Ένα **τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο** αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

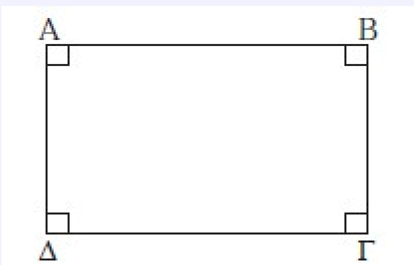
- ✦ Οι απέναντι πλευρές ανά δυο είναι . . . .
- ✦ Δυο απέναντι πλευρές του είναι . . . . και . . . .
- ✦ Οι απέναντι γωνίες ανά δυο είναι . . . .
- ✦ Οι διαγώνιοί του . . . .

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

- Διακρίνουμε **τρία είδη παραλληλογράμμων**: το ορθογώνιο, το . . . . και το τετράγωνο.

5.3 Ορθογώνιο

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορθογώνιο λέγεται το. . . . . που έχει μία γωνία ορθή.*

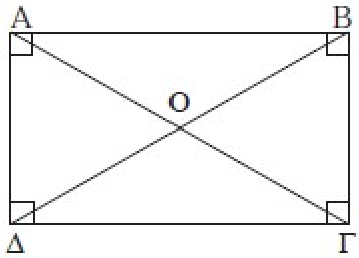


- Όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι . . . .

. . . .

Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι . . . .



Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

• Ένα **τετράπλευρο είναι ορθογώνιο**, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

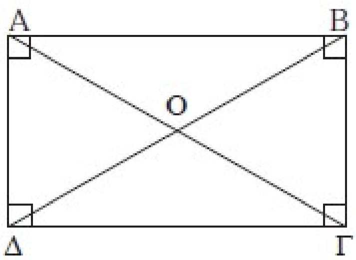
i. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία . . . . γωνία.

ii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι . . . . του είναι ίσες.

iii. Έχει . . . . γωνίες ορθές.

iv. Όλες οι . . . . του είναι ίσες.

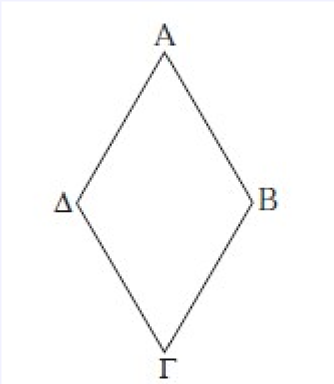
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



. . . .

5.4 Ρόμβος

ΟΡΙΣΜΟΣ. ***Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο*** *που έχει δύο .... πλευρές ίσες.*



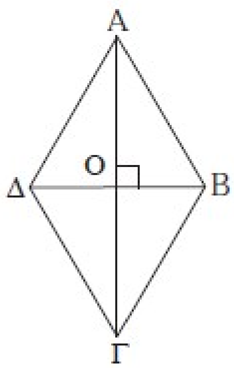
● Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ....

Ιδιότητες του ρόμβου

i. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται ....

ii. Οι διαγώνιοι του ρόμβου .... τις γωνίες του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα **τετράπλευρο είναι ρόμβος**, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

✦ Έχει όλες τις πλευρές του ....

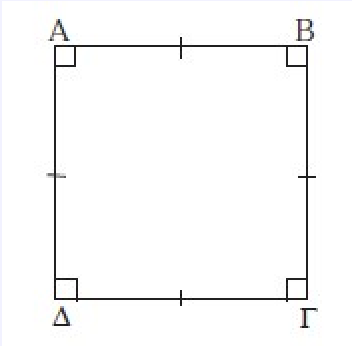
....

- ✦ Είναι .... και δυο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- ✦ Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται ....
- ✦ Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του .... μία γωνία του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

5.5 Τετράγωνο

ΟΡΙΣΜΟΣ. ***Τετράγωνο*** *λέγεται το.........................* *που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.*



Ιδιότητες τετραγώνου

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το **τετράγωνο** έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο :

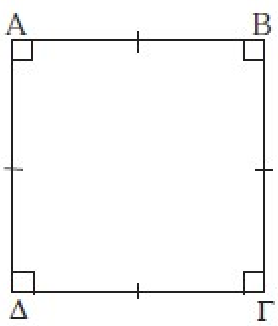
i. Οι απέναντι .... του είναι παράλληλες.

ii. Όλες οι πλευρές του είναι ....

iii. Όλες οι γωνίες του είναι ....

iv. Οι διαγώνιοί του είναι ...., τέμνονται ...., διχοτομούνται και .... τις γωνίες του.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



....

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

• Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι **τετράγωνο**, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

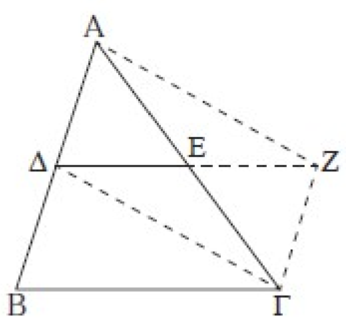
Αποδεικνύεται ότι **ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο**, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις :

- ✦ Μία γωνία του είναι .... και δύο .... πλευρές του είναι ίσες.
- ✦ Μία γωνία του είναι ορθή και μία .... του διχοτομεί μία γωνία του.
- ✦ Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του ....
- ✦ Οι διαγώνιοί του είναι .... και δύο .... πλευρές του είναι ίσες.
- ✦ Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η .... διχοτομεί μία γωνία του.
- ✦ Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και ....

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι .... προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το .... της.*

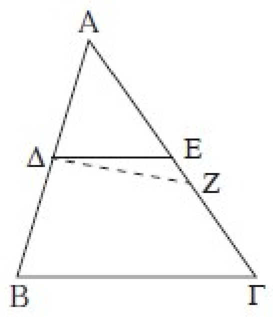
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



....

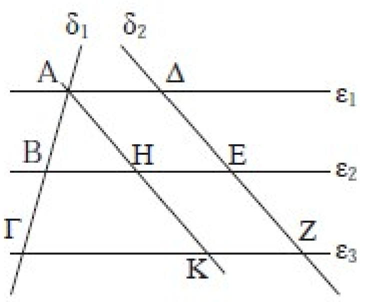
ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή .... από το .... της τρίτης πλευράς του.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία .... τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε .... άλλη ευθεία που τις τέμνει.*

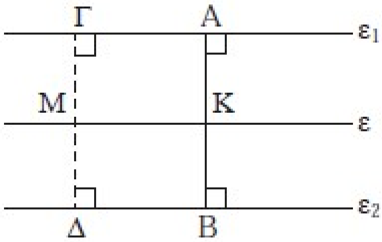
ΑΠΟΔΕΙΞΗ



• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε , ... προς τις ε_1 και ε_2 ,η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δυο παράλληλες.

Η ευθεία ε λέγεται .... των ε_1 και ε_2.

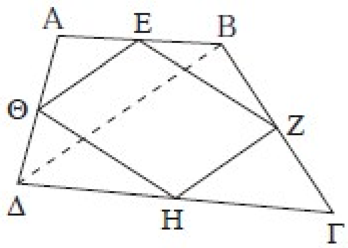
....



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

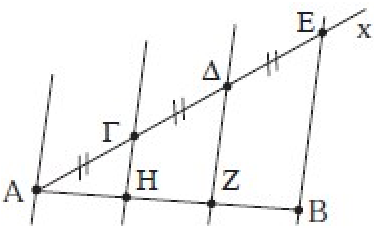
ΛΥΣΗ



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

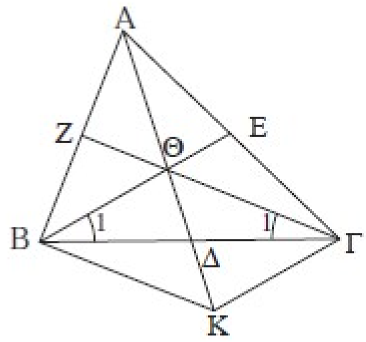
Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα

ΛΥΣΗ



5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

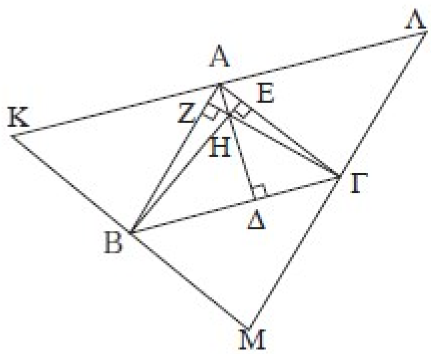
ΘΕΩΡΗΜΑ. *Οι **διάμεσοι** ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα ......του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.*



• Το σημείο στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι κάθε τριγώνου , λέγεται .... (ή κέντρο βάρους) του τριγώνου.
• Η απόσταση του **βαρυκέντρου** ενός τριγώνου από κάθε κορυφή του ισούται με τα ...... του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο .... Το σημείο αυτό λέγεται .... του τριγώνου.*

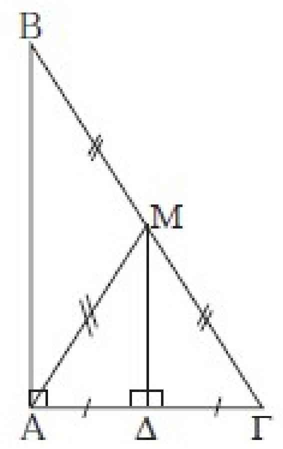


ΠΟΡΙΣΜΑ. *Οι κορυφές Α, Β, Γ, τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η ,αποτελούν .... τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το* ***ορθόκεντρο του τριγώνου****, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.*

5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η* ***διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας*** *είναι ίση με το .... της ....*

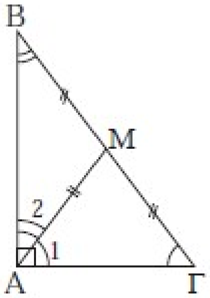
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι .... με .... την πλευρά αυτή.*

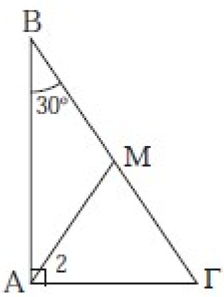
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

....



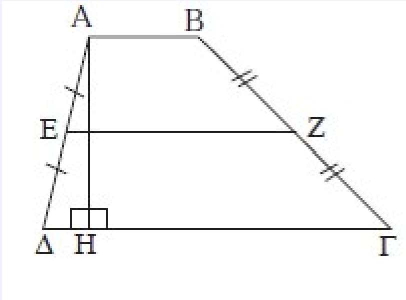
ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με ......,τότε η απέναντι πλευρά του είναι το* ***μισό της υποτείνουσας*** *και αντίστροφα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

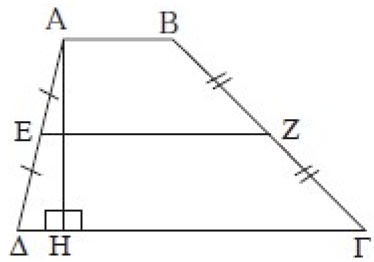


5.10 Τραπέζιο

ΟΡΙΣΜΟΣ. ***Τραπέζιο*** *λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο . . . . . . πλευρές παράλληλες.*



• Οι παράλληλες πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ λέγονται . . . . του τραπεζίου.
• Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται . . . . του τραπεζίου.
• Το ευθύγραμμο τμήμα EZ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται . . . . του τραπεζίου.



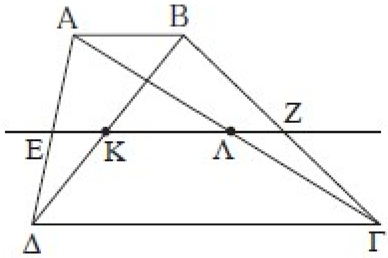
ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το . . . . τους.*

• Δηλαδή, αν EZ διάμεσος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

$$EZ = \frac{\ldots + \ldots}{2}$$

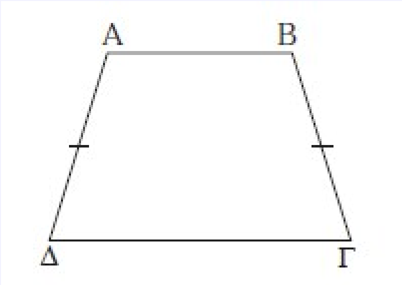
ΠΟΡΙΣΜΑ. *Η διάμεσος EZ τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ διέρχεται από τα μέσα K και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα $K\Lambda$ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την . . . . των βάσεών του.*

. . . .



5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

ΟΡΙΣΜΟΣ. ***Ισοσκελές τραπέζιο*** *λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ....*

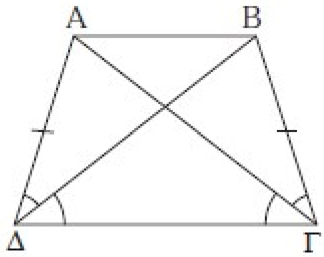


Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

Αν ένα τραπέζιο είναι **ισοσκελές**, τότε:

i. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ....

ii. Οι διαγώνιοί του είναι ....



Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι **ισοσκελές**, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

✦ Οι γωνίες που .... σε μια βάση του είναι ίσες.

....

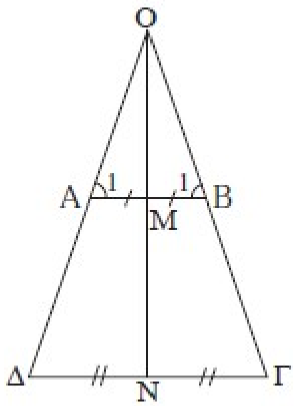
✦ Οι . . . . του είναι ίσες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ **Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο :**

i. **αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα.**

ii. **η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος της κάθε βάσης.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



5.12 Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου

- Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ διέρχονται από το ίδιο σημείο :

✦ Οι **μεσοκάθετοι** των τριών πλευρών του. Το κοινό σημείο Ο λέγεται . . . . του ΑΒΓ και ο κύκλος (O, OA) λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου.

✦ Οι **διχοτόμοι** των τριών γωνιών του. Το κοινό σημείο I λέγεται . . . . του ΑΒΓ και ο κύκλος με κέντρο το I και ακτίνα την κοινή απόσταση του I από τις τρεις πλευρές του, λέγεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου.

✦ Οι τρεις **διάμεσοί** του. Το κοινό σημείο τους Θ λέγεται .... του ΑΒΓ.

✦ Τα τρία **ύψη** του. Το κοινό σημείο τους H λέγεται .... του ΑΒΓ.