θεωρία

επανάληψη κατεύθυνσης

β' λυκείου

Τζίκας Αριστοτέλης ● **μαθηματικός**

Το παρόν βιβλίο περιέχει :

- Όλη τη θεωρία με κενά για να συμπληρώσετε και επιλεγμένες εφαρμογές από το σχολικό βιβλίο για να λύσετε ,έτσι ώστε να κάνετε μία πλήρη επανάληψη της θεωρίας και των βασικών ασκήσεων.

Εύχομαι να βοηθήσει στο διαβασμά σας !!!

ΤΖΙΚΑΣ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

www.captainmathblog.centerplay.gr

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία-Κατεύθυνσης 1^o κεφάλαιο

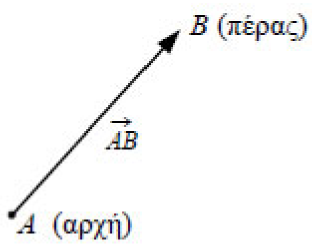
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

• Το διάνυσμα ορίζεται ως ένα .... ευθύγραμμο τμήμα.

• Το πρώτο άκρο λέγεται ...., ενώ το δεύτερο λέγεται .... του διανύσματος.

• Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με ...... παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το A και καταλήγει στο ....



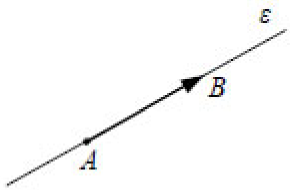
• Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται ....

✦ Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι .... διάνυσμα.

• Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, λέγεται .... ή μήκος του διανύσματος και συμβολίζεται με ....

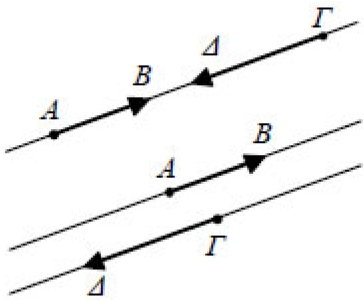
• Αν ένα διάνυσμα έχει μέτρο 1 ,τότε λέγεται . . . .

• Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μημηδενικό διάνυσμα λέγεται . . . . του διανύσματος.



✦ Ως . . . . ενός μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$ μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A.
✦ Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι **παράλληλος ή συμπίπτει** με μια ευθεία ζ, τότε λέμε ότι το $\overrightarrow{AB}$ είναι . . . . προς τη ζ και γράφουμε . . . $\parallel \zeta$.

• Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται . . . . ή συγγραμμικά διανύσματα.
✦ Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα . . . . . . και . . . . . . έχουν ίδια διεύθυνση και γράφουμε . . . . . . // . . . .



• Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε . . . . και αντίρροπα
✦ Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ομόρροπα όταν έχουν ίδια . . . . και ίδια . . . . ,δηλαδή όταν έχουν ίδια . . . .
✦ Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται αντίρροπα όταν έχουν ίδια . . . . και αντίθετη . . . . ,δηλαδή όταν έχουν αντίθετη . . . .

. . . .

• Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ίσα όταν έχουν την ίδια .... και ίσα ....

Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε ...... = ...

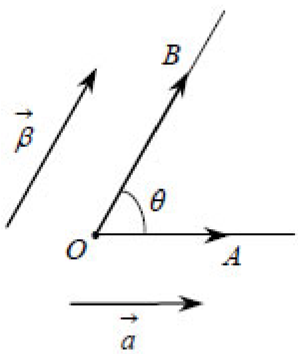
• Δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα, όταν έχουν αντίθετη .... και ίσα ....

Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε ...... = ...

• Είναι φανερό ότι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \ldots\ldots$

• Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$. Την κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB, την ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων .... και τη συμβολίζουμε με .... ή ακόμα,και με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα θ.

✦ Οι τιμές που μπορεί να πάρει η θ είναι: $\ldots\ldots \leq \theta \leq \ldots\ldots$



✦ $\overrightarrow{\alpha} \upuparrows \overrightarrow{\beta}$,τότε $\hat{\theta} = \ldots\ldots$

✦ $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\beta}$,τότε $\hat{\theta} = \ldots\ldots$

✦ $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta}$,τότε $\hat{\theta} = \ldots\ldots$

• Αν ένα από τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία τους μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία θ με $0^o \leq \ldots \leq 180^o$

✦ Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα, $\overrightarrow{0}$, είναι ομόρροποή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο ....

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω M το μέσο της πλευράς $A\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Με αρχή το M γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BA}$. Να αποδειχτεί ότι το A είναι το μέσο του ΔE.

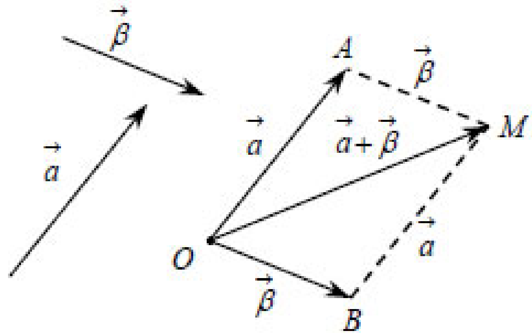
ΛΥΣΗ

1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

• Έστω δύο διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το A παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\beta}$

Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται .... ή συνισταμένη των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ και συμβολίζεται με ....

• Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο κανόνα του παραλληλόγραμμου.



ΠΡΟΤΑΣΗ. *Το άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου O.*

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

....

Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

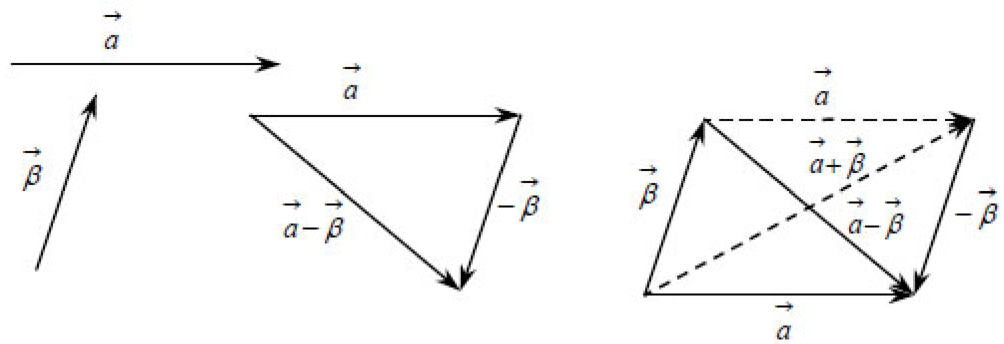
Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$	$=$	Αντιμεταθετική ιδιότητα
$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$	$=$	Προσεταιριστική ιδιότητα
$\vec{\alpha}+\vec{0}$	$=$	
$\vec{\alpha}+(\overrightarrow{-\alpha})$	$=$	

Αφαίρεση Διανυσμάτων

• Η διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων ...... και ......
Δηλαδή:

$$\ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots + (-\ldots\ldots)$$



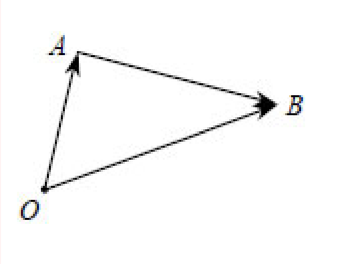
Διάνυσμα Θέσεως

• Έστω O ένα σταθερό σημείο του επιπέδου. Τότε για κάθε σημείο M του επιπέδου ορίζεται το διάνυσμα ......, το οποίο λέγεται διάνυσμα θέσεως του M ή διανυσματική .... του M.

✦ Το σημείο O, που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του επιπέδου, λέγεται σημείο αναφοράς.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε :*

$$\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots - \ldots\ldots$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

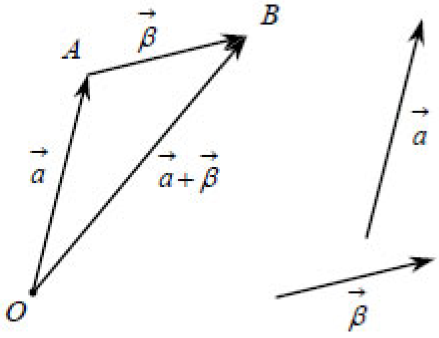
• Συνεπώς κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της

. . . .

Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\ldots\ldots\ldots \leq |\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}| \leq \ldots\ldots\ldots$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ να αποδειχτεί ότι : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Gamma}$.

ΛΥΣΗ

. . . .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι : $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$.

ΛΥΣΗ

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

• Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα.
Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με .... ένα διάνυσμα το οποίο :

- ✦ είναι ομόρροπο του ......, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του ......, αν $\lambda < 0$
- ✦ έχει μέτρο ....

• Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$, τότε το $\lambda\vec{\alpha}$ είναι ίσο με το .... διάνυσμα.

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

• Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$	$=$
$(\lambda+\mu)\vec{\alpha}$	$=$
$\lambda(\mu\vec{\alpha})$	$=$

• Ως συνέπεια του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων έχουμε:

(i) $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$

(ii) $(-\lambda\vec{\alpha})=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$

(iii) $\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$

(iv) $(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}$

(v) **Αν** $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ **και** $\lambda\neq 0$, **τότε** $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

(vi) **Αν** $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, **τότε** $\lambda=\mu$.

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

• **Γραμμικός συνδυασμός** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής ....

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν* $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ *είναι δύο διανύσματα, με* $\beta \neq 0$ *τότε*

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \ldots\ldots\ldots, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

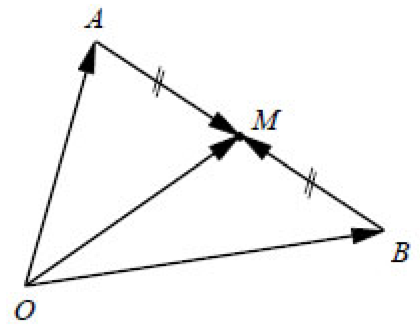
<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

....

Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

• Ας πάρουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O. Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{2}$$



<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Άξονας

• Έχουμε έναν άξονα με αρχή το O και **μοναδιαίο διάνυσμα** το $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ και τον συμβολίζουμε με $x'x$.

✦ Η ημιευθεία Ox λέγεται .... ημιάξονας, ενώ η Ox' λέγεται .... ημιάξονας.

✦ Αν, τώρα, πάνω στον άξονα $x'x$ πάρουμε ένα σημείο M, επειδή $\overrightarrow{OM} \parallel \vec{i}$ θα υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε $\overrightarrow{OM} = \ldots\ldots\vec{i}$ τον αριθμό x τον ονομάζουμε .... του M.

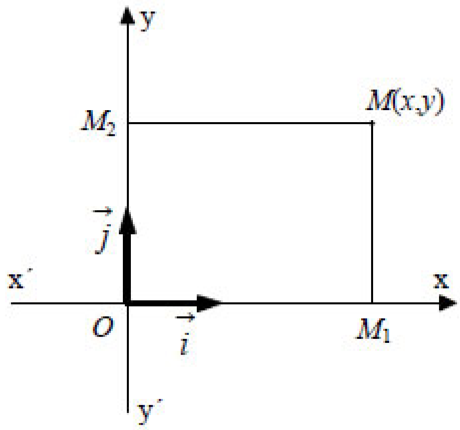
Καρτεσιανό Επίπεδο

• Πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παίρνουμε ένα σημείο M. Από το M φέρνουμε την παράλληλη στον $y'y$, που τέμνει τον $x'x$ στο M_1 και την παράλληλη στον $x'x$, που τέμνει τον $y'y$ στο M_2.

....

Αν x είναι η τετμημένη του M_1 ως προς τον άξονα $x'x$ και y η τετμημένη του M_2 ως προς τον άξονα $y'y$, τότε ο x λέγεται .... του M και ο y .... του M.

✦ Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται .... του M.

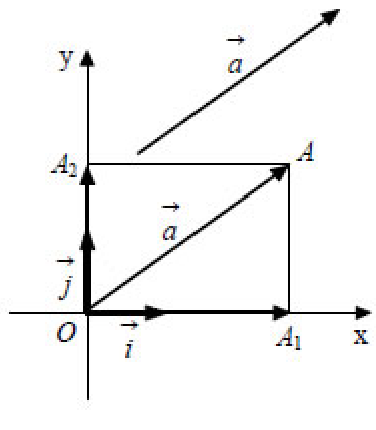


Συντεταγμένες Διανύσματος

• Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το O σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$.

✦ Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε:

$$\overrightarrow{OA} = \ldots\ldots + \ldots\ldots$$



• Αν x, y είναι οι συντεταγμένες του A, τότε ισχύει $\overrightarrow{OA_1} = \ldots\ldots\vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2} = \ldots\ldots\vec{j}$

....

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Κάθε διάνυσμα* $\overrightarrow{\alpha}$ *του επιπέδου γράφεται κατά* ***μοναδικό τρόπο*** *στη μορφή :*

$$\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Τα διανύσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{j}$ λέγονται .... του διανύσματος $\vec{\alpha}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$, ενώ οι αριθμοί x, y λέγονται .... του $\vec{\alpha}$ στο σύστημα Oxy.

✦ Πιο συγκεκριμένα, ο x λέγεται .... του $\vec{\alpha}$ και ο y λέγεται .... του $\vec{\alpha}$.

• Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ....

• Καθένα από τα ίσα διανύσματα με τετμημένη x και τεταγμένη y, θα το συμβολίζουμε με το διατεταγμένο ζεύγος ....

Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

• Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε:

✦ $\vec{\alpha} + \vec{\beta} =$ ....

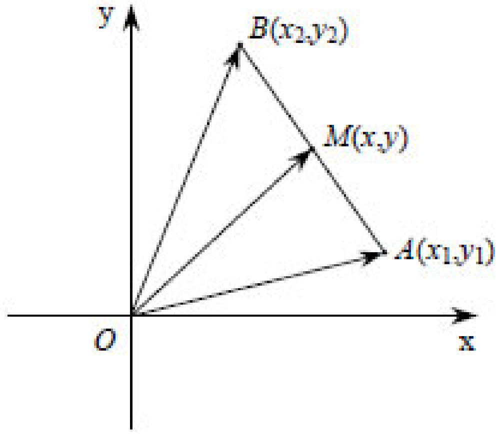
✦ $\lambda\vec{\alpha} =$ ....

✦ $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} =$ ....

....

Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB ,τότε θα έχουμε :

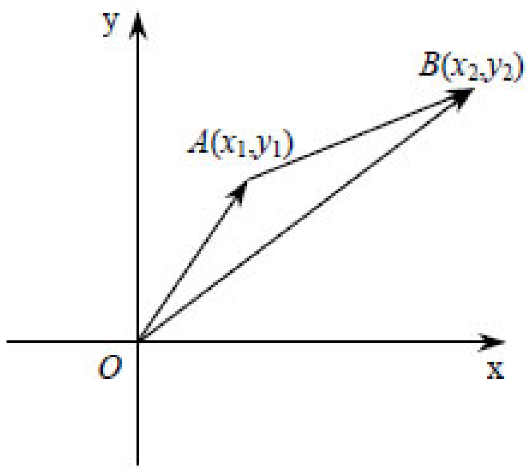


$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$,τότε θα έχουμε :

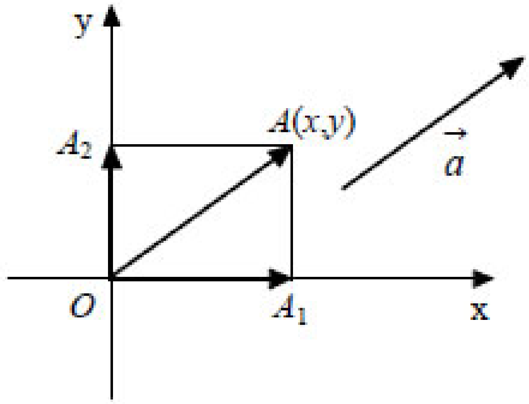


$$\boldsymbol{x = x_2 - x_1} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{y = y_2 - y_1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Μέτρο Διανύσματος

Έστω $\overrightarrow{\alpha}$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και A το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}$ Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως ,επειδή το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y ,θα ισχύει :

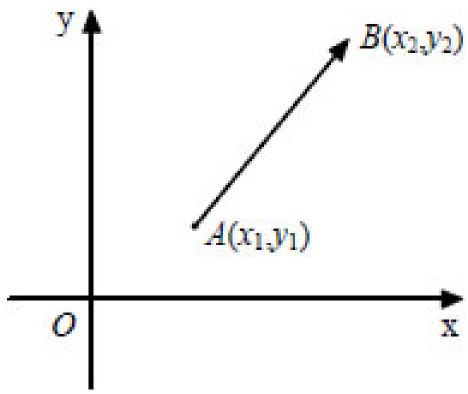


$$|\overrightarrow{\boldsymbol{\alpha}}| = \sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Απόσταση δύο σημείων

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου ,τότε η απόστασή τους (AB) δίνεται από τον τύπο :



$$\boldsymbol{(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν $A(-2,1)$ και $B(1,4)$ είναι οι δύο κορυφές του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$ και $K(2,-3)$ το κέντρο του ,να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.

ΛΥΣΗ

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου ,τότε :*

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$$

,με :

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1$$

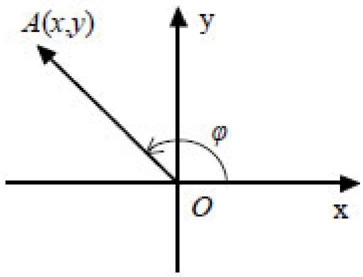
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

• Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$.

✦ Τη γωνία ϕ , που διαγράφει ο ημιάξονας αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA, την ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$.

✦ Είναι φανερό ότι : $\ldots \leq \phi \leq \ldots$



• Για τη γωνία ϕ , όπως είναι γνωστό από την Τριγωνομετρία, αν το $\vec{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, ισχύει :

$$\epsilon\phi\phi = \frac{y}{x} = \lambda$$

,όπου λ ο **συντελεστής** .... του διανύσματος ......

✦ Αν $y = 0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha} \parallel x'x$ τότε ο **συντελεστής διεύθυνσης** του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι $\lambda = \ldots\ldots$

✦Αν $x = 0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha} \parallel y'y$, τότε δεν ....
συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με* ***συντελεστές διεύθυνσης*** *λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε θα έχουμε :*

$$\boldsymbol{\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

....

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα σημεία $A(1,0)$, $B(-\mu^2,3)$ και $\Gamma(-5\mu,9)$ είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ονομάζουμε* ***εσωτερικό γινόμενο*** *δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό*

$$\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Άν $\vec{\alpha}=0$ ή $\vec{\beta}=0$ τότε : $\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta} = \ldots\ldots$

Όπου ϕ η ***γωνία*** *των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.*

• Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής :

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}^2$ και λέγεται **τετράγωνο του** $\vec{\alpha}$. Έχουμε: $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\text{συν}0=|\vec{\alpha}|^2$. Επομένως

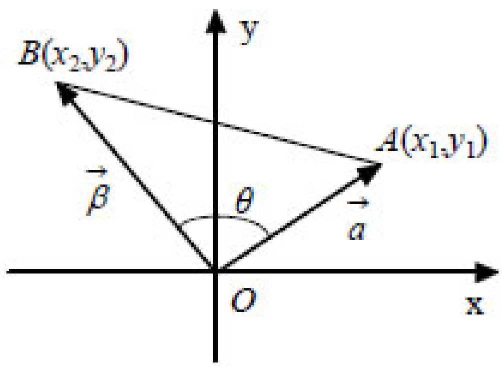
$$\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2.$$

Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

• Το **εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

$$\overrightarrow{\alpha} \bullet \overrightarrow{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



Από τον **νόμο των συνημιτόνων** για το τρίγωνο OAB έχουμε :

$$(\boldsymbol{AB})^2 = (\boldsymbol{OA})^2 + (\boldsymbol{OB})^2 - 2(\boldsymbol{OA})(\boldsymbol{OB})\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}\widehat{\boldsymbol{AOB}}$$

. . . .

. . . .

. . . .

• Με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης του εσωτερικού γινομένου θα αποδείξουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες :

$i.$ $\lambda\overrightarrow{\alpha} \bullet \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha} \bullet (\lambda\overrightarrow{\beta}) = \lambda(\overrightarrow{\alpha} \bullet \overrightarrow{\beta}) \quad ,\lambda \in \mathbb{R}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

. . . .

ii. $\overrightarrow{\alpha} \bullet (\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}) = \overrightarrow{\alpha} \bullet \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\alpha} \bullet \overrightarrow{\gamma}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

iii. $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$,όπου $\lambda_1 = \lambda_{\overrightarrow{\alpha}}$ και $\lambda_2 = \lambda_{\overrightarrow{\beta}}$ με $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \nparallel y'y$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων

• Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου προκύπτει ότι :

$$\text{συν}\theta = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}.$$

και αφού ισχύουν :

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2, \quad |\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

καταλήγουμε στον τύπο :

$$\text{συν}\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (x_2, y_2)$,να αποδειχθεί ότι :

i. $|\overrightarrow{\alpha} \bullet \overrightarrow{\beta}| \leq |\overrightarrow{\alpha}| \cdot |\overrightarrow{\beta}|$

ii. $(\overrightarrow{\alpha} \bullet \overrightarrow{\beta})^2 \leq \overrightarrow{\alpha}^2 \cdot \overrightarrow{\beta}^2$

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω δύο διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ που έχουν μέτρα $|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{3}$,$|\overrightarrow{\beta}| = 1$ και σχηματίζουν γωνία $\phi = \dfrac{\pi}{6}$. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}$.

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται τα διανύματα $\overrightarrow{\alpha} = (3, 1)$ και $\overrightarrow{v} = (1, 2)$. Να αναλυθεί το $\overrightarrow{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες ,από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{\alpha}$.

ΛΥΣΗ

Κεφάλαιο 2

ΕΥΘΕΙΕΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ

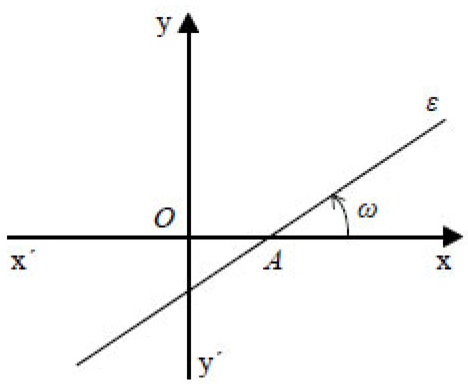
Θεωρία-Κατεύθυνσης 2^o κεφάλαιο

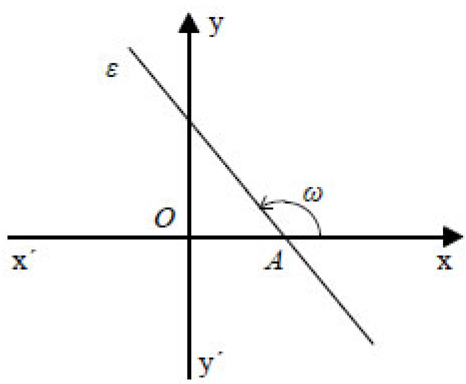
Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

• Μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται **εξίσωση μιας γραμμής** C, όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C, και μόνο αυτές, την . . . .

Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας



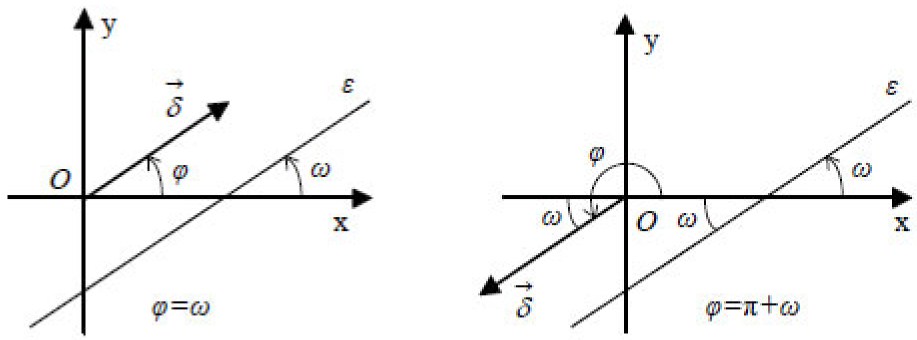


• Ο **συντελεστής διεύθυνσης** μιας ευθείας ισούται με:

$$\lambda = \ldots\ldots$$

και ορίζεται εφόσον η γωνία $\hat{\omega} \neq \ldots\ldots$

• Αν $\hat{\omega} = 90^0$ τότε δεν ορίζεται ο ....
....
• Αν $\hat{\omega}$ **αμβλεία** τότε λ......
• Αν $\hat{\omega}$ **οξεία** τότε λ......
• Αν η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$,τότε $\hat{\omega} =$ ......
• Για τη γωνιά ω ισχύει : $0^0 \le \hat{\omega} \le 180^0$ ή σε ακτίνια $\ldots \le \hat{\omega} \le \ldots$
• Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι **παράλληλα**, έχουν τον ίδιο
....



• Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι:

$$\lambda = \frac{\ldots - \ldots}{\ldots - \ldots}$$

Συνθήκες Καθετότητας και Παραλληλίας Ευθειών

• Έστω τα διανύσματα $\vec{\delta_1}$ και $\vec{\delta_2}$ τα οποία είναι παράλληλα προς τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 αντίστοιχα τότε ισχύουν:

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\delta_1} \parallel \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots$$

και

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\delta_1} \perp \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = \ldots$$

Επομένως, αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, τότε:

....

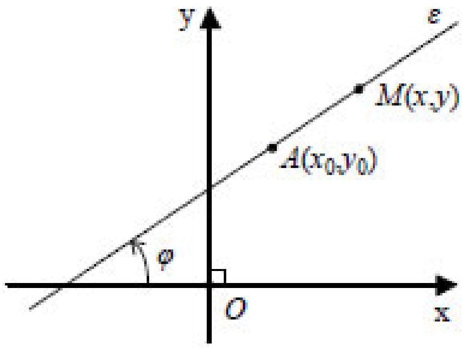
$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \ldots \lambda_2$$

και

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = \ldots$$

Με τον συμβολισμό $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ εννοούμε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή ότι συμπίπτουν.

Εξίσωση Ευθείας



✦ Η ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από σημείο $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

✦ Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{\ldots - \ldots}{\ldots - \ldots}$ και αν επιλέξουμε το σημείο $A(x_1, y_1)$ εξίσωση:

$$y - y_1 = \frac{\ldots - \ldots}{\ldots - \ldots}(x - x_1)$$

ή επιλέγοντας το σημείο $B(x_2, y_2)$ θα έχει εξίσωση:

$$y - y_2 = \frac{\ldots - \ldots}{\ldots - \ldots}(x - x_2)$$

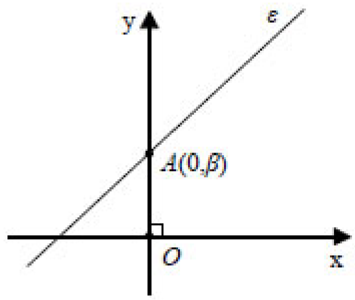
✦ Η ευθεία που είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από ένα σταθερό σημείο $A(x_0, y_0)$ **δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης** και η εξίσωσή της είναι της μορφής:

$$x = \dots$$

Ειδικές περιπτώσεις

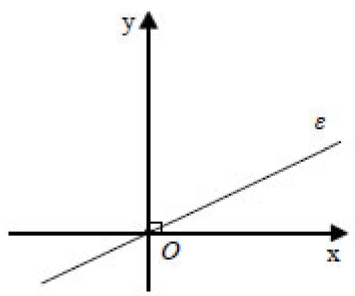
• Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - \beta = \lambda(x - 0)$, η οποία τελικά γράφεται

$$y = \dots x + \dots$$

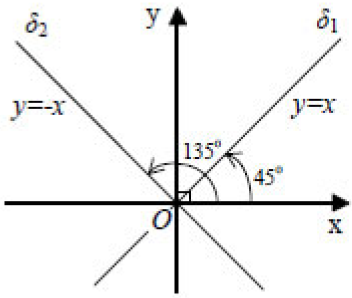


• Η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - 0 = \lambda(x - 0)$, η οποία τελικά γράφεται

$$y = \dots x$$

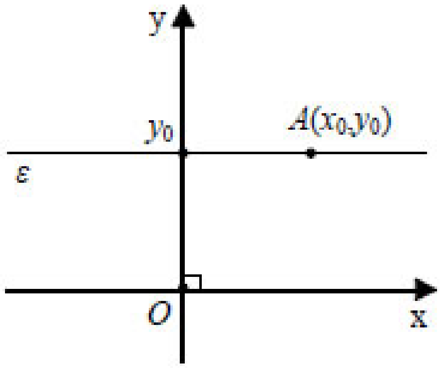


• Οι **διχοτόμοι των γωνιών** xOy και yOx' έχουν εξισώσεις $y = \dots\dots$ και $y = \dots\dots$ αντιστοίχως.



• Αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι μια **οριζόντια ευθεία** ,τότε έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με ... και εξίσωση της μορφής

$$y = \ldots\ldots$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α(-1,2), Β(1,5) και Γ(4,1). Να βρεθούν οι εξισώσεις :

i. **Του ύψους που άγεται από την κορυφή Α**

ii. **Της διαμέσου που άγεται από την κορυφή Β**

iii. **Της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΓ.**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται η ευθεία ε με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 1$ και το σημείο Α(2,1). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Α ως προς την ευθεία ε.

ΛΥΣΗ

2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Η Εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, **με** $A \neq 0$ **ή** $B \neq 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε* ***ευθεία του επιπέδου*** *έχει εξίσωση της μορφής* $Ax + By + \Gamma = 0$, *με* $A \neq 0$ *ή* $B \neq 0$ (1)
και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ***ευθεία γραμμή.***

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία

• Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι **παράλληλη** στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι **κάθετη** στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ **Δίνεται η εξίσωση :**

$$(x - 2y + 5) + \lambda(3x + 2y + 7) = 0 \qquad (1) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

i. **Να αποδειχθεί ότι :**

1. **Για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή**
2. **Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) (Οικογένεια ευθειών) διέρχονται από το ίδιο σημείο.**

ii. **Ποια από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta : y = 2x$;**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται τρίγωνο $\boldsymbol{AB\Gamma}$ με κορυφές $\boldsymbol{A(2,3), B(4,1)}$ και $\boldsymbol{\Gamma(5\lambda-1,\lambda)}$ $\lambda\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου κινείται σε μια ευθεία ,καθώς το $\boldsymbol{\lambda}$ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

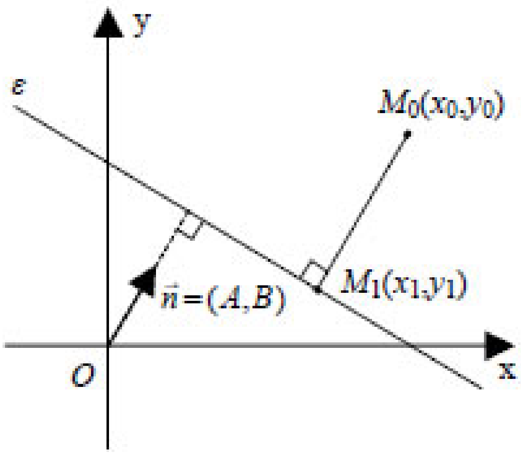
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $\boldsymbol{\varepsilon_1 : x-y+1=0}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_2 : 2x+y-3=0}$.
Δίνεται ότι $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu 72^o = \dfrac{\sqrt{10}}{10}}$

ΛΥΣΗ

2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

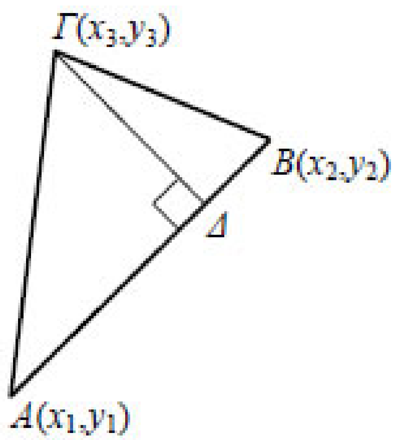
Απόσταση Σημείου από Ευθεία



• Η **απόσταση** ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ από μία ευθεία ε :$Ax + By + \Gamma$ υπολογίζεται από τον τύπο :

$$\boldsymbol{d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Υπολογισμός Εμβαδού



Το **εμβαδόν** ενός τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3)$ υπολογίζεται από τον τύπο :

$$\boldsymbol{(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right|}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Θεωρούμε τα σημεία $A(-3,0), B(-2,0), \Gamma(-4,2)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει : $(MB\Gamma) = 2(AB\Gamma)$

ΛΥΣΗ

Κεφάλαιο 3

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία-Κατεύθυνσης 3^o κεφάλαιο

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

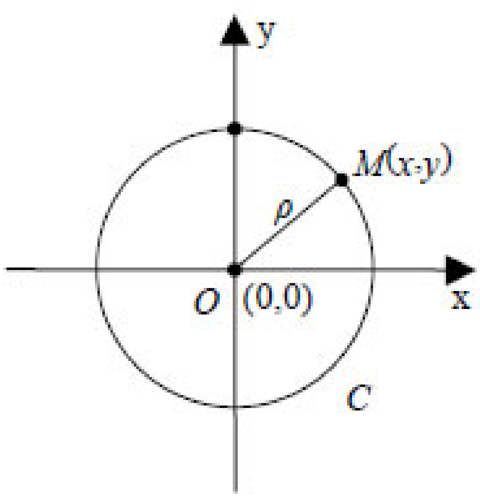
3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

Εξίσωση Κύκλου

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $M(x, y)$ ένα οποιοδήποτε σημείο ενός κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ ,τότε ο* ***κύκλος με κέντρο το σημείο*** $O(0,0)$ ***και ακτίνα*** ρ *έχει εξίσωση :*

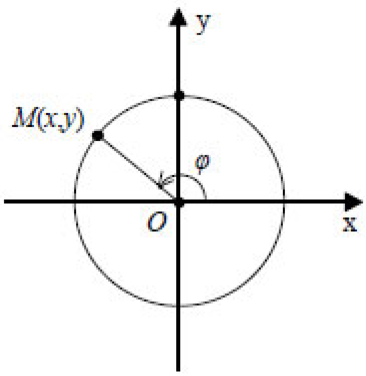
$$\ldots \quad + \quad \ldots = \ldots$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



Μάλιστα αν $\rho = 1$ ο κύκλος αυτός λέγεται ....

Παραμετρικές Εξισώσεις Κύκλου



• Γνωρίζουμε από την τριγωνομετρία ότι για ένα σημείο $M(x, y)$ ενός κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ και έστω ότι η γωνία που σχηματίζει το OM με τον άξονα Ox με φορά αντιωρολογιακή είναι ίση με ϕ, $\phi \in [0, 2\pi)$

τότε θα έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu\phi = \dfrac{x}{\rho}$ άρα $\qquad \boldsymbol{x = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\phi}$

επίσης $\eta\mu\phi = \dfrac{y}{\rho}$ άρα $\qquad \boldsymbol{y = \rho \cdot \eta\mu\phi}$.

• Τώρα παρατηρούμε ότι αυτές οι σχέσεις για τα x και y επαληθεύουν την εξίσωση

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = \rho^2}$$

που είναι η εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ.

• Συνεπώς τις σχέσεις

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\rho \cdot \sigma\upsilon\nu\phi}$$

και

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\rho \cdot \eta\mu\phi}$$

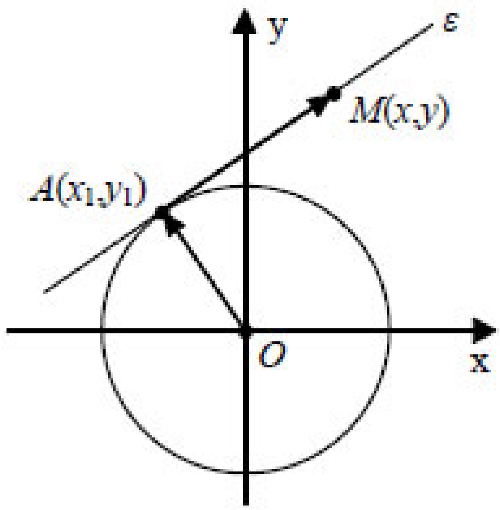
τις λέμε **παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου** με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ.

Εφαπτομένη Κύκλου

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ϵ η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο (O, ρ) ,$A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής και $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της ϵ ,τότε η εξίσωση της ευθείας ϵ είναι η :*

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

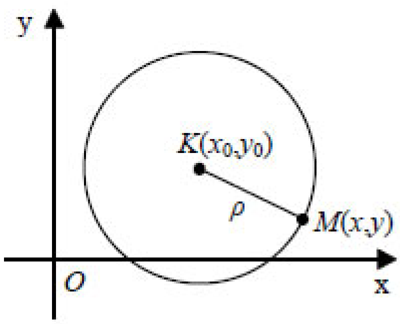
ΑΠΟΔΕΙΞΗ



• Άρα η **εξίσωση εφαπτομένης** σε ενα σημείο $A(x_1, y_1)$ του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα ρ είναι:

$$\boxed{\ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots = \ldots}$$

Η Εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$



Εφόσον ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ θα πρέπει η απόσταση του M από το K να είναι ίση με ρ. Άρα $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \ldots$

Άρα καταλήγουμε στην σχέση

$$\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \ldots}$$

και αν κάνουμε πράξεις θα καταλήξουμε σε μία σχέση της μορφής

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0}$$

Άρα :

....

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Κάθε κύκλος με κέντρο* $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ *και ακτίνα* $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$ *έχει εξίσωση της μορφής :*

$$\boldsymbol{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0} \quad \text{, με } \boldsymbol{A^2+B^2-4\Gamma>0} \quad \boldsymbol{(I)}$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (Ι) παριστάνει κύκλο.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 5$ που διέρχονται από το σημείο $A(3, 1)$ και να αποδειχτεί ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ και $C_2 : x^2 + (y+1)^2 = 3^2$

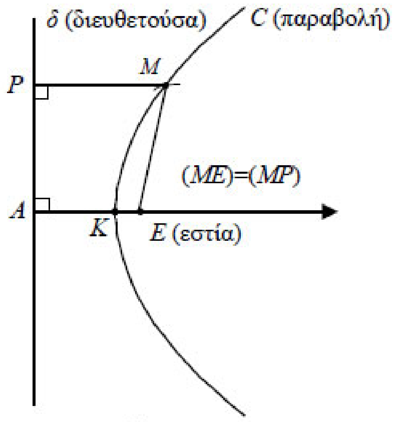
i. **Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης ε του κύκλου C_1 στο σημείο $A(5,-1)$**

ii. **Να αποδειχθεί ότι η ε εφάπτεται και στον κύκλο C_2**

ΛΥΣΗ

3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Ορισμός Παραβολής

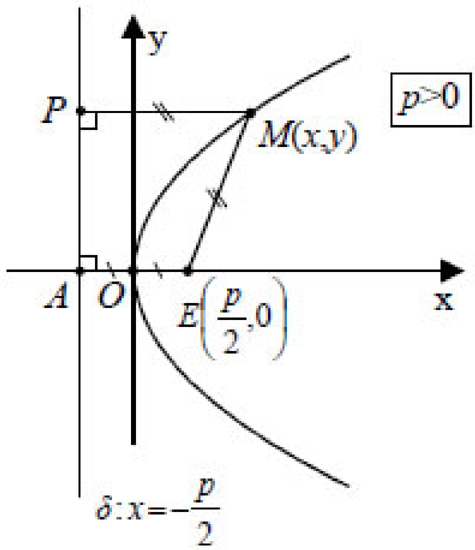


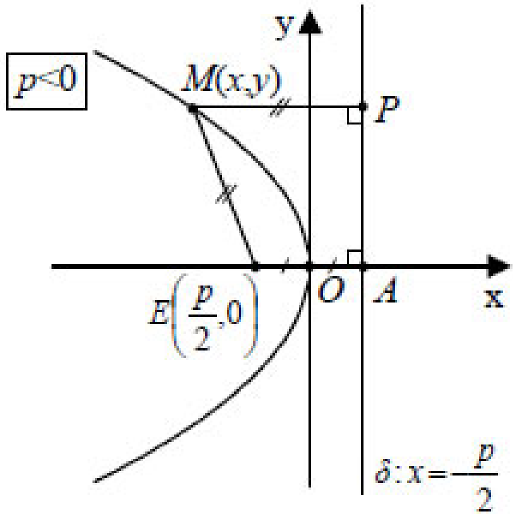
(α)

Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ. Ονομάζεται **παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθείαδ** ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου τα οποία **ισαπέχουν** από το σημείο E και την ευθεία δ (Σχ. α).

• Αν A είναι η προβολή της εστίας E στη διευθετούσα δ, τότε το μέσο K του EA είναι σημείο της παραβολής και λέγεται **κορυφή** της.

Εξίσωση Παραβολής





• Αν η εστία E της παραβολής C με κορυφή $O(0,0)$ ανήκει στον θετικό ημιάξονα Ox και απέχει απόσταση $|p|$ από την διευθετούσα δ τότε το $O(0,0)$ θα είναι το μέσο αυτής της απόστασης άρα θα έχουμε $E(\frac{p}{2},0)$ με $p>0$ και εξίσωση διευθετούσας δ: $x=-\frac{p}{2}$.

• Αντίστοιχα αν η εστία E της παραβολής C με κορυφή $O(0,0)$ ανήκει στον αρνητικό ημιάξονα Ox' και απέχει απόσταση $|p|$ από την διευθετούσα δ τότε το $O(0,0)$ θα είναι το μέσο αυτής της απόστασης άρα θα έχουμε $E(\frac{p}{2},0)$ με $p<0$ και εξίσωση διευθετούσας : δ: $x=-\frac{p}{2}$.

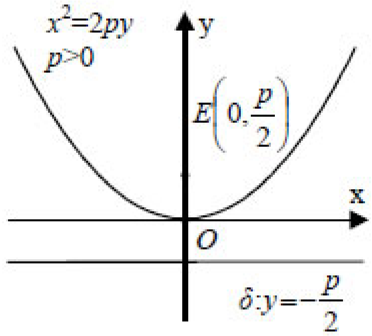
• Σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής, ένα σημείο $M(x,y)$ θα ανήκει στη παραβολή C, αν και μόνο αν ισχύει :

$$\boldsymbol{d(M,E)=d(M,\delta)} \qquad \textbf{(1)}$$

από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στην εξίσωση

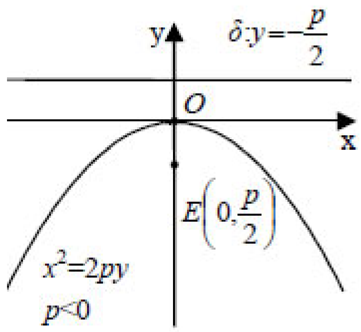
$$\boldsymbol{y^2=2px}$$

που είναι η εξίσωση παραβολής με εστία $E(\frac{p}{2},0)$ και διευθετούσα δ :$x=-\frac{p}{2}$



Αν τώρα η εστία είναι στον ημιάξονα Oy για $p>0$ ή στον ημιάξονα Oy' για $p<0$ τότε θα έχουμε : εστία $E(0,\frac{p}{2})$,διευθετούσα δ: $y=-\frac{p}{2}$ και **εξίσωση παραβολής** :

$$\boldsymbol{x^2=2py}$$



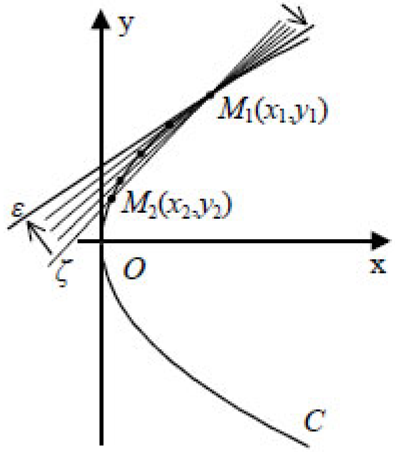
Ιδιότητες Παραβολής

Η κάθετη ευθεία από την εστία στη διευθετούσα είναι **άξονας συμμετρίας της παραβολής** και λέγεται άξονας της παραβολής.

Εφαπτομένη Παραβολής

Η **εφαπτομένη** της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\boldsymbol{y \cdot y_1 = p \cdot (x + x_1)}$$

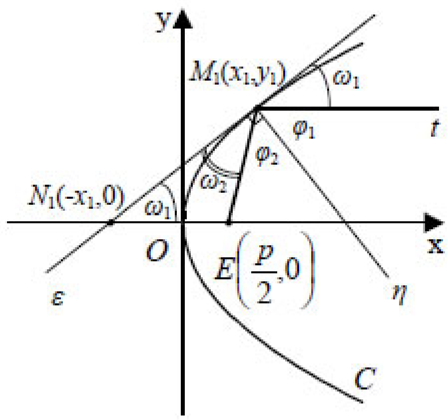


Αντίστοιχα η **εφαπτομένη** της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\boldsymbol{x \cdot x_1 = p \cdot (y + y_1)}$$

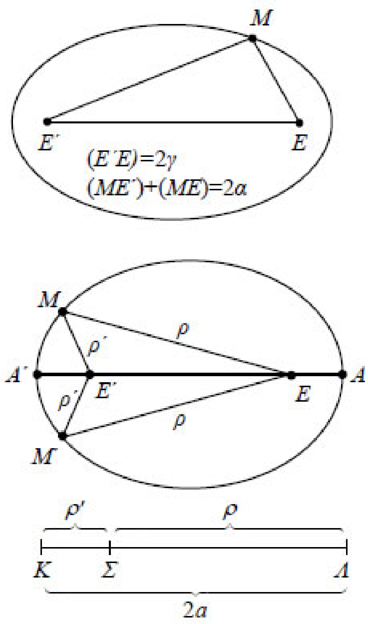
Ανακλαστική Ιδιότητα Παραβολής

• Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_1 **διχοτομεί τη γωνία** που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t , που είναι ομόρροπη της OE, όπου E είναι η εστία της παραβολής.



3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ

Ορισμός Έλλειψης



Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται **έλλειψη** με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το **άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $E'E$** . Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως, με 2α και την απόσταση των εστιών E' και E με 2γ. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση της έλλειψης.**

• Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό :
Ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο της έλλειψης, αν και μόνο αν :
$\boldsymbol{(ME) + (ME') = 2\alpha}$

• Ισχύει $(EE') < (ME) + (ME')$, δηλαδή $2\gamma < 2\alpha \Rightarrow \gamma < \alpha$.

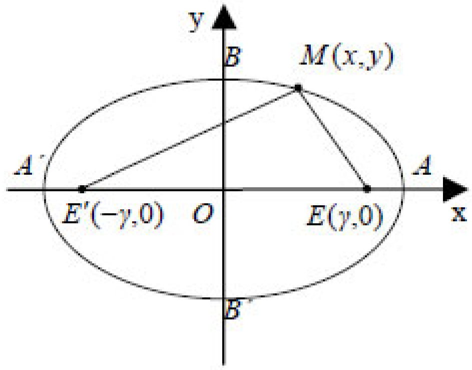
• Αν $\gamma = 0$, τότε τα σημεία E', E συμπίπτουν, οπότε η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο το E και ακτίνα α.

Εξίσωση Έλλειψης

Εστω έλλειψη με τις εστίες της Ε(γ,0) και Ε΄(-γ,0) να ανήκουν στον αξονα $x'x$ και έστω η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ το μέσο του τμήματος ΕΕ΄.

Ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου είναι σημείο της έλλειψης, αν και μόνο αν : $\boldsymbol{(ME)+(ME')=2\alpha}$ Απο αυτή τη σχέση καταλήγουμε στην :

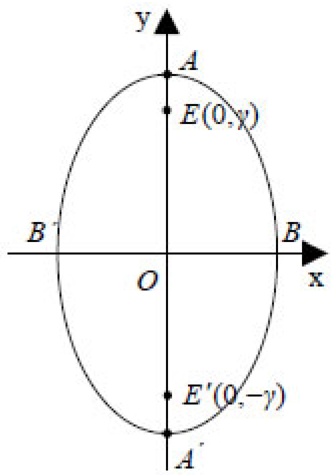
$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{\alpha^2}}+\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{\beta^2}}=\mathbf{1} \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$



Εστω έλλειψη με τις εστίες της Ε(0,γ) και Ε΄(0,-γ) να ανήκουν στον αξονα $y'y$ και έστω η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ το μέσο του τμήματος ΕΕ΄.

Ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου είναι σημείο της έλλειψης, αν και μόνο αν :$(ME)+(ME')=2\alpha$
Απο αυτή τη σχέση καταλήγουμε στην :

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{\beta^2}}+\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{\alpha^2}}=\mathbf{1} \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$



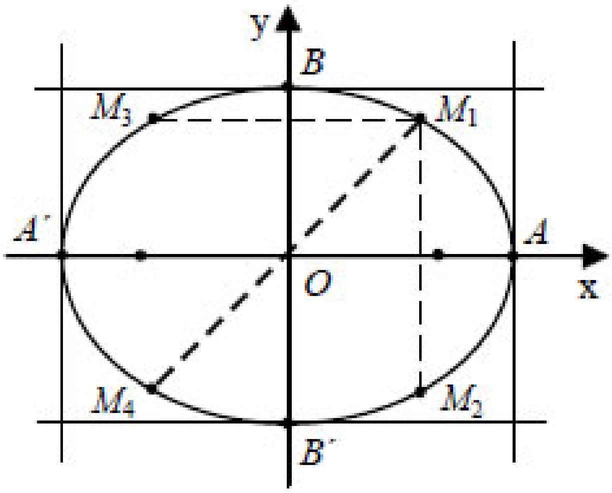
Ιδιότητες Έλλειψης

- Η ευθεία που ενώνει τις εστίες Ε΄,Ε της έλλειψης και η μεσοκάθετος του Ε΄Ε είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης, ενώ το μέσο Ο του Ε΄Ε είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο της έλλειψης.**

- Από την εξίσωση της έλλειψης για $y=0$ βρίσκουμε $x=\pm\alpha$, ενώ για $x=0$ βρίσκουμε $y=\pm\beta$.

Επομένως, η έλλειψη C τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha,0)$ και $A(\alpha,0)$, ενώ τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B'(0,-\beta)$ και $B(0,\beta)$.

Τα σημεία A',A,B',B λέγονται **κορυφές της έλλειψης**, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$, τα οποία έχουν μήκη $(A'A) = 2\alpha$ και $(B'B) = 2\beta$, λέγονται **μεγάλος άξονας και μικρός άξονας** αντιστοίχως.



• Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε **συμμετρικά ως προς O σημεία** M_1 και M_4 της έλλειψης λέγεται **διάμετρος της έλλειψης**.
Η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες
$x = -\alpha,\ x = \alpha\ ,y = -\beta,\ y = \beta.$

Εκκεντρότητα Έλλειψης

• Μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της έλλειψης είναι η **εκκεντρότητα** της έλλειψης. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}}$.

Παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{\varepsilon} < 1$ αφού $\gamma < \alpha$

Επίσης επειδή $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ με αντικατάσταση και πράξεις καταλήγουμε στον τύπο :

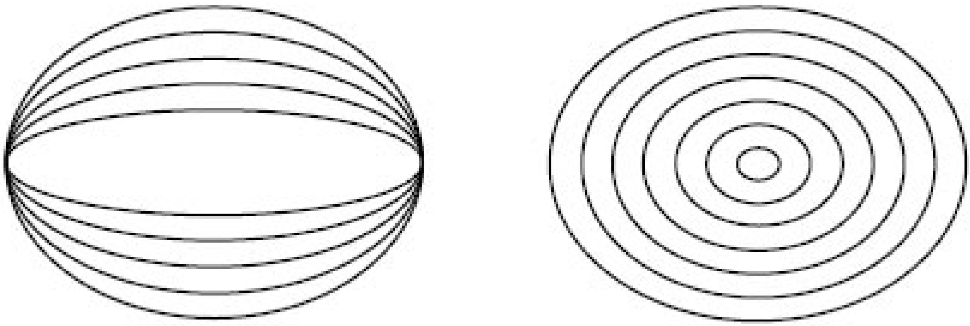
$$\boldsymbol{\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \qquad (1)$$

• Επομένως, όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα τόσο μικραίνει ο λόγος $\dfrac{\beta}{\alpha}$ και κατά συνέπεια τόσο πιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη.

• Όταν το **ε** τείνει στο μηδέν, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 1 και επομένως η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

• Όταν, όμως, το **ε** τείνει στη μονάδα, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0 και επομένως η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα. (σχήμα α)

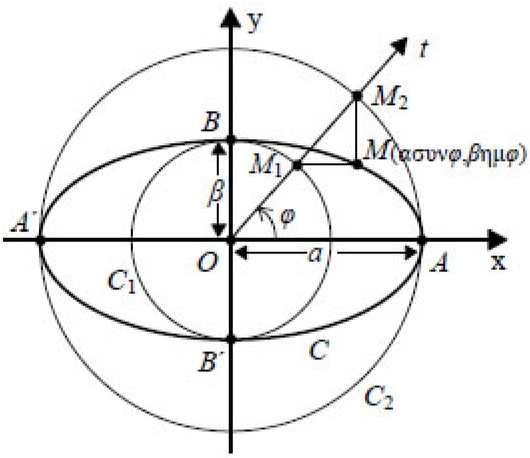
• Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$, λέγονται **όμοιες**(σχήμα β)



(α) (β)

Παραμετρικής Εξισώσεις Έλλειψης

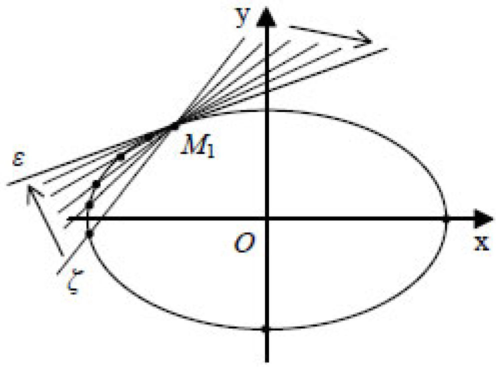
Είναι οι εξισώσεις $\boldsymbol{x = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\phi}$ και $\boldsymbol{y = \beta \cdot \eta\mu\phi}$, $\boldsymbol{\phi \in [0, 2\pi)}$



Εφαπτομένη Έλλειψης

Έστω μια έλλειψη C με εξίσωση :

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{\alpha^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{\beta^2}} = 1$$



Η **εφαπτομένη της έλλειψης** C στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ αποδεικνύεται ότι έχει εξίσωση :

$$\frac{\boldsymbol{xx_1}}{\boldsymbol{\alpha^2}} + \frac{\boldsymbol{yy_1}}{\boldsymbol{\beta^2}} = 1$$

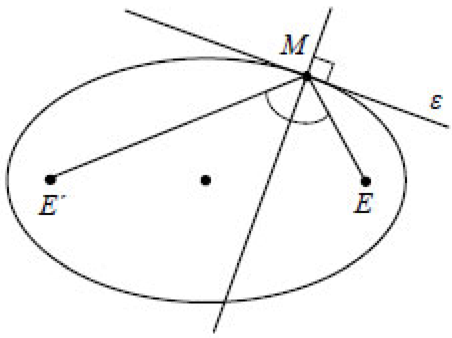
• Αν μια έλλειψη έχει εξίσωση : $\dfrac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{\alpha^2}} + \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1$

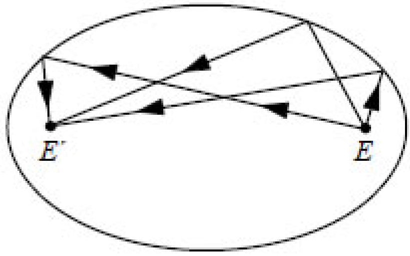
τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\frac{\boldsymbol{yy_1}}{\boldsymbol{\alpha^2}} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$$

• Όπως η παραβολή έτσι και η έλλειψη έχει ανάλογη **ανακλαστική ιδιότητα** :

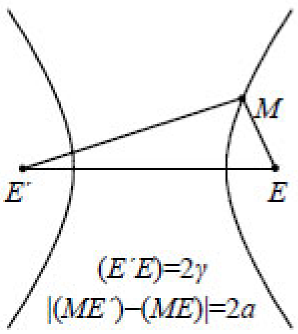
Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M **διχοτομεί τη γωνία** $E'\hat{M}E$, όπου E', E οι εστίες της έλλειψης.

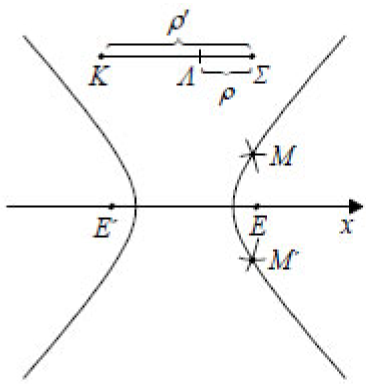




3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Ορισμός Υπερβολής





Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται **έλλειψη** με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $(E'E)$. Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες την παριστάνουμεσυνήθως με 2α, ενώ την απόσταση των εστιών με 2γ. Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση της υπερβολής.**

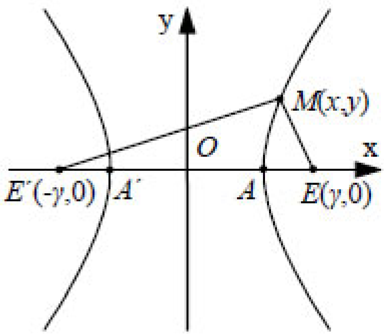
• Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό :
Ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν : $|(ME') - (ME)| = 2\alpha$

• Ισχύει $|(ME') - (ME) < (E'E)$, δηλαδή $2\alpha < 2\gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$.

Εξίσωση Υπερβολής

• Εστω υπερβολή με τις εστίες της Ε(γ,0) και Ε΄(-γ,0) να ανήκουν στον αξονα $x'x$ και έστω η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ το μέσο του τμήματος EE'.

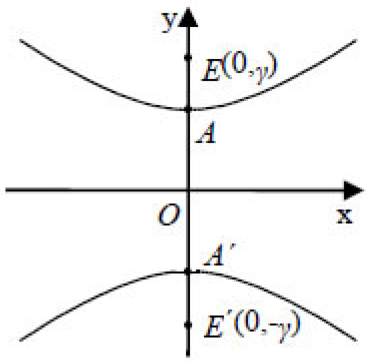
Ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν : $|(ME') - (ME)| = 2\alpha$
Απο αυτή τη σχέση καταλήγουμε στην :



$$\boldsymbol{\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1} \quad \text{όπου} \quad \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$$

• Εστω υπερβολή με τις εστίες της Ε$(0,\gamma)$ και Ε΄$(0,-\gamma)$ να ανήκουν στον αξονα $y'y$ και έστω η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ το μέσο του τμήματος ΕΕ΄.

Ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν : $|(ME') - (ME)| = 2\alpha$
Απο αυτή τη σχέση καταλήγουμε στην :



$$\boldsymbol{\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1} \quad \text{όπου} \quad \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$$

Ιδιότητες Υπερβολής

• Η ευθεία που ενώνει τις εστίες Ε΄,Ε της υπερβολής και η μεσοκάθετος του Ε΄Ε είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής, ενώ το μέσο Ο του Ε΄Ε είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο της υπερβολής.**

• Από την εξίσωση της υπερβολής για $y = 0$ βρίσκουμε $x = \pm\alpha$. Συνεπώς, η υπερβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha, 0)$, και $A(\alpha, 0)$. Τα σημεία αυτά λέγονται **κορυφές της υπερβολής**.

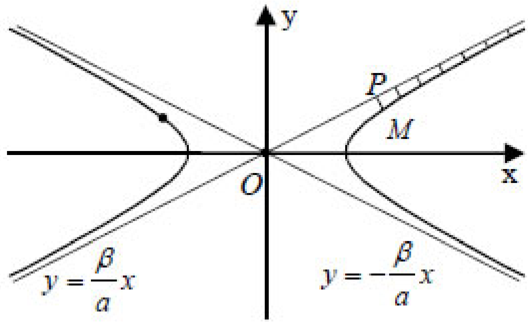
• Από την ίδια εξίσωση για $x = 0$ προκύπτει η εξίσωση $y^2 = -\beta^2$, η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Επομένως, η υπερβολή C δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

• Επίσης, τα σημεία της υπερβολής C βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών $x = -\alpha$ και $x = \alpha$, πράγμα που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από **δύο χωριστούς κλάδους.**

Ασύμπτωτες Υπερβολής

• Έστω μια υπερβολή C με εξίσωση :

$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{\alpha}^2} - \frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{\beta}^2} = \mathbf{1} \quad (1)$$



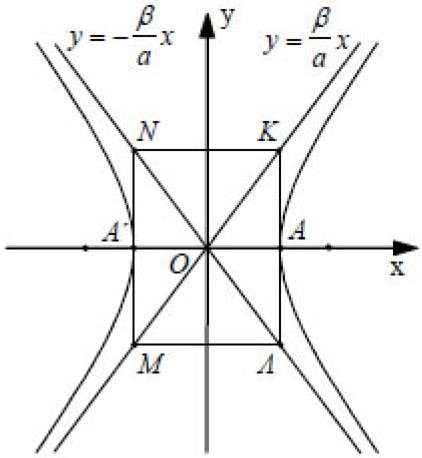
τότε οι ευθείες με εξισώσεις :

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{y} = -\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}$$

λέγονται **ασύμπτωτες** της υπερβολής.

• Έστω μια υπερβολή C με εξίσωση :

$$\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{\alpha}^2} - \frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{\beta}^2} = \mathbf{1} \quad (2)$$



τότε οι ευθείες με εξισώσεις :

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{y} = -\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}$$

λέγονται **ασύμπτωτες** της υπερβολής.

• Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιες του ορθογώνιου $K\Lambda MN$ με κορυφές τα σημεία $K(\alpha, \beta), \Lambda(\alpha, -\beta), M(-\alpha, -\beta)$,$N(-\alpha, \beta)$. Το ορθογώνιο αυτό λέγεται ορθογώνιο βάσης της υπερβολής.

Εκκεντρότητα Υπερβολής

• Μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της υπερβολής είναι η εκκεντρότητα της. Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\alpha}}$.

• Παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{\varepsilon} > 1$ αφού $\gamma > \alpha$

Επίσης επειδή $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ με αντικατάσταση και πράξεις καταληγουμε στον τύπο : $\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ (1)

• Επομένως, η εκκεντρότητα **ε** προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της ασυμπτώτου της, δηλαδή χαρακτηρίζει το ορθογώνιο βάσης, άρα τη μορφή της ίδιας της υπερβολής.

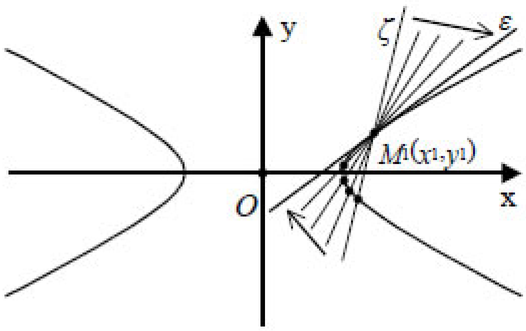
• Όταν το **ε** μικραίνει και τείνει στο 1, τότε ο λόγος $\dfrac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0 άρα και το β τείνει στο 0.
Κατά συνέπεια, όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

Εφαπτομένη Υπερβολής

• Έστω μια υπερβολή C με εξίσωση
: $\dfrac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{\alpha}^2} - \dfrac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{\beta}^2} = \mathbf{1}$ (1)

Η **εφαπτομένη της υπερβολής** C στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ αποδεικνύεται ότι έχει εξίσωση :

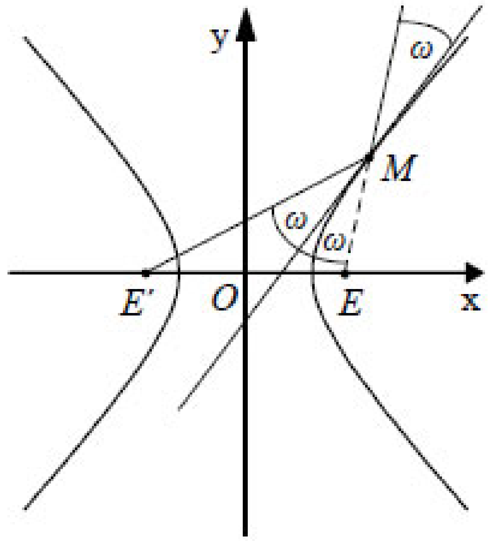
$$\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{\alpha}^2} - \frac{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}_1}{\boldsymbol{\beta}^2} = \mathbf{1}$$

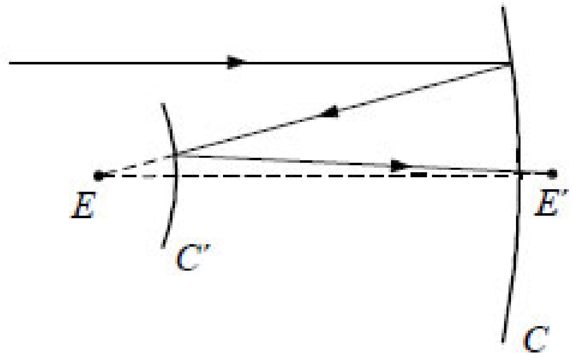


• Αν μια υπερβολή έχει εξίσωση : $\dfrac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{\alpha}^2} - \dfrac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{\beta}^2} = \mathbf{1}$ (2)
τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση :

$$\frac{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}_1}{\boldsymbol{\alpha}^2} - \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{\beta}^2} = \mathbf{1} \quad (2)$$

• Όπως η έλλειψη έτσι και η υπερβολή έχει ανάλογη **ανακλαστική ιδιότητα** :
Η εφαπτομένη μιας υπερβολής στο σημείο επαφής M **διχοτομεί τη γωνία** $E'\hat{M}E$, όπου E', E οι εστίες της υπερβολής.


y
ω
M
ω
ω
E′
O
E
x


E
E′
C′
C