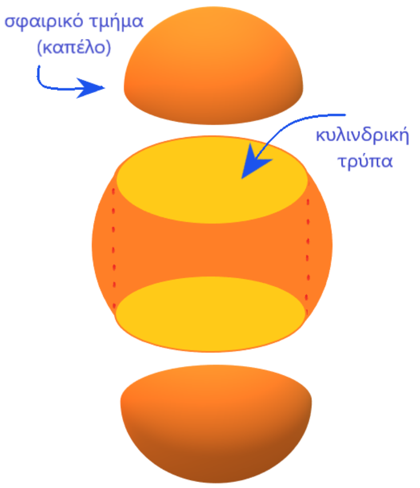
ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΣΤΟ ΘΕΜΑ 38850 ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΣΤΗΝ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Ο τύπος που χρησιμοποιείται είναι ο εξής:

$$V = \frac{4}{3}\pi R_1^3 - 4\pi(R_1^2 - 4) - \frac{4}{3}\pi(R_1 - 2)^2(R_1 + 1)$$

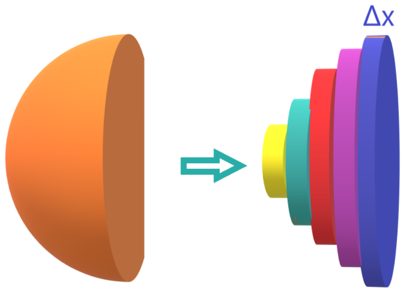
και αναφέρεται στον όγκο μιας σφαίρας που μένει άν αφαιρέσουμε από αυτήν το όγκο ενός κυλίνδρου και των αντιστοιχων σφαιρικών τμημάτων (καπέλων) με την προϋπόθεση ότι ανοίγουμε μία κυλινδρική τρύπα στην σφαίρα.



• Στον τύπο που δίνεται το $\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi R_1^3}$ αντιστοιχεί στον **όγκο σφαίρας** ακτίνας $\boldsymbol{R_1}$.
• Επίσης το $\boldsymbol{4\pi(R_1^2 - 4)}$ αντιστοιχεί στον **όγκο κυλίνδρου** ακτίνας βάσης $\boldsymbol{\sqrt{R_1^2 - 4}}$ και ύψους $\boldsymbol{4}$.

Θα αποδείξουμε ότι το $\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi(R_1 - 2)^2(R_1 + 1)}$ αντιστοιχεί στον όγκο των δύο σφαιρικών τμημάτων (καπέλων).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



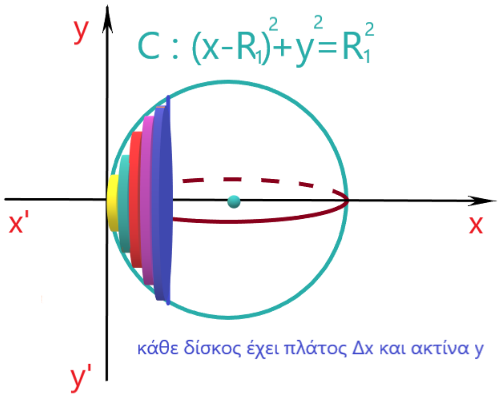
Αν προσεγγίσουμε το σφαιρικό τμήμα χωρίζοντάς το σε $\boldsymbol{\nu}$ το πλήθος δίσκους με πλάτος $\boldsymbol{\Delta x}$ ο καθένας και ακτίνα $\boldsymbol{y \in (0, R_1 - 2]}$,αφού η ακτίνα της σφαίρας είναι R_1 και το μισό του ύψους του κυλίνδρου ισούται με 2 ,τότε ο όγκος κάθενός από τους δίσκους θα ισούται με $\boldsymbol{\pi y^2 \Delta x}$.

• Αν αθροίσουμε τους όγκους κάθε δίσκου θα έχουμε μία προσέγγιση του όγκου του σφαιρικού τμήματος.

$$\sum_{i=1}^{\nu} \pi y_i^2 \Delta x$$

• Βέβαια για να έχουμε την βέλτιστη προσέγγιση ,αρκεί να πάρουμε το **όριο** του παραπάνω αθροίσματος καθώς το $\nu \to \infty$

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{\nu} \pi y_i^2 \Delta x$$



Μπορούμε με έναν μέγιστο κύκλο $C : (x - R_1)^2 + y^2 = R_1^2$,της σφαίρας ,να εκφράσουμε τις ακτίνες των δίσκων y ως προς x. Έτσι θα έχουμε : $y^2 = R_1^2 - (x - R_1)^2$

• Συνεπώς το όριο του αθροίσματος είναι το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_0^{R_1 - 2} \pi (R_1^2 - (x - R_1)^2) dx$$

,θυμίζουμε ότι ο κύλινδρος είχε ύψος 4 ,άρα αν από την ακτίνα R_1 της σφαίρας αφαιρέσουμε το μισό του ύψους του κυλίνδρου θα πάρουμε $R_1 - 2$.

Άρα θα πολλαπλασιάσουμε το ολοκλήρωμα I με το 2 ,αφού έχουμε δύο σφαιρικά τμήματα και θα έχουμε :

$$2 \cdot \int_0^{R_1 - 2} \pi (R_1^2 - (x - R_1)^2) dx = 2 \cdot \int_0^{R_1 - 2} \pi (2xR_1 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{R_1 - 2} \pi (2xR_1 - x^2) dx = 2\pi \cdot \left[x^2 R_1 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{R_1 - 2}$$

$$= 2\pi \cdot \left[(R_1 - 2)^2 R_1 - \frac{(R_1 - 2)^3}{3} - 0 \right]$$

$$= 2\pi \cdot (R_1 - 2)^2 \left(R_1 - \frac{(R_1 - 2)}{3} \right) = 2\pi \cdot (R_1 - 2)^2 \cdot \frac{(2R_1 + 2)}{3}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot (R_1 - 2)^2 \cdot (R_1 + 1)$$

- Άρα ο όγκος των σφαιρικών τμημάτων (καπέλων) θα είναι ίσος με :

$$\boxed{V = \frac{4\pi}{3} \cdot (R_1 - 2)^2 \cdot (R_1 + 1)}$$