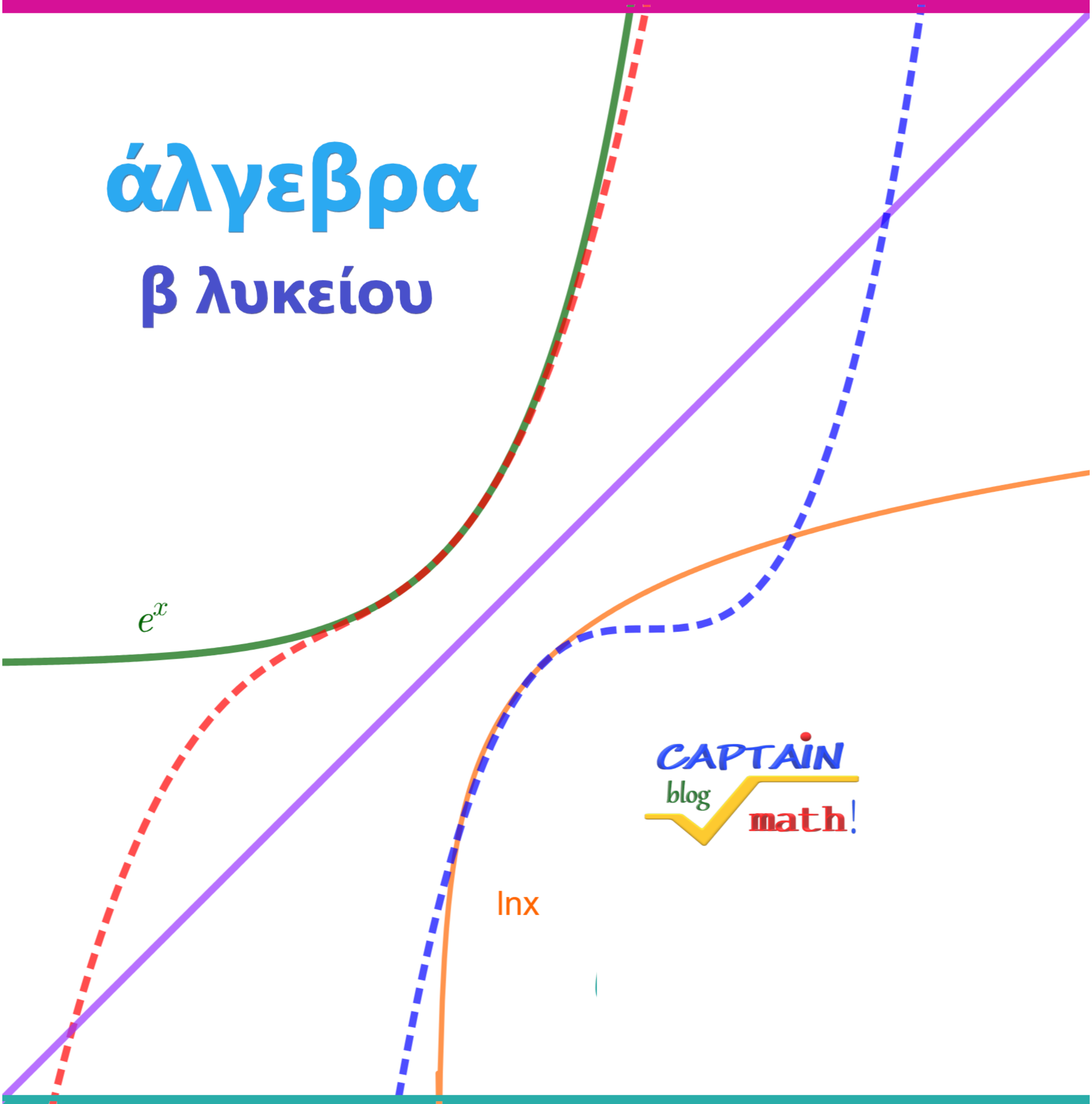
# θεωρία

# άλγεβρα

## β λυκείου




Τζίκας Αριστοτέλης ● μαθηματικός

**Το παρόν βιβλίο περιέχει :**

✦ Όλη τη θεωρία με κενά για να συμπληρώσετε και επιλεγμένες εφαρμογές από το σχολικό βιβλίο για να λύσετε ,έτσι ώστε να κάνετε μία πλήρη επανάληψη της θεωρίας και των βασικών ασκήσεων.

**Εύχομαι να βοηθήσει στο διαβασμά σας !!!**

ΤΖΙΚΑΣ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

CAPTAIN blog math!

**www.captainmathblog.centerplay.gr**

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία-Άλγεβρα $1^o$ κεφάλαιο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

## 1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

• Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, λέγεται ...................
............, παριστάνει ευθεία γραμμή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται ......... της γραμμικής εξίσωση

• Πότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα $2x2$;

• Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται ......... του συστήματος.

• Περιγράψτε την μέθοδο της αντικατάστασης ,για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $2x2$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης το παρακάτω σύστημα.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2y + 6} \\ \boldsymbol{3x + 4y = 8} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

..........................................................................................

• Περιγράψτε την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών ,για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $2x2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λύσετε με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών το παρακάτω σύστημα.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2y + 6} \\ \boldsymbol{3x + 4y = 8} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

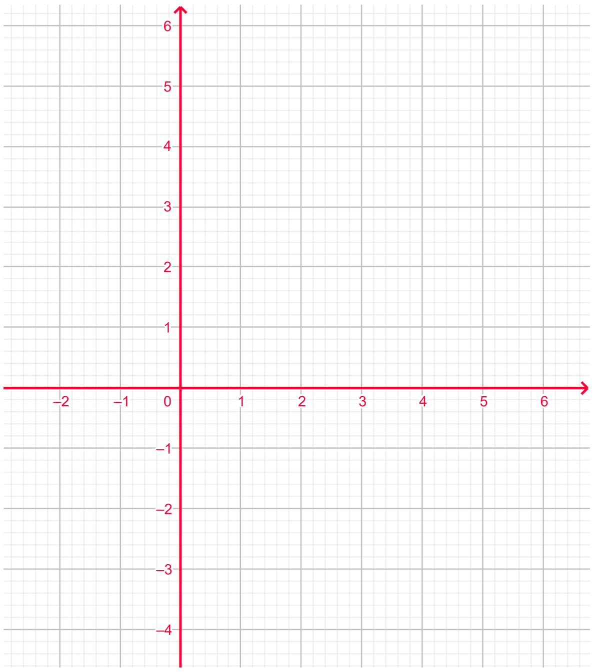
• Περιγράψτε την μέθοδο γραφικής επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος $2x2$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λύσετε το παρακάτω σύστημα γραφικά.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2y + 6} \\ \boldsymbol{3x + 4y = 8} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ




• Γενικά, από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $2x2$ αναμένουμε μια μόνο από τις περιπτώσεις:

✦ Το σύστημα να έχει ............ λύση

✦ Το σύστημα να μην έχει λύσεις άρα να είναι .........

✦ Το σύστημα να έχει ............ πλήθος λύσεων.

• Περιγράψτε την επίλυση ενός συστήματος

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

με την μέθοδο των οριζουσών.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λύσετε με την μέθοδο των οριζουσών το παρακάτω σύστημα.

$$\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

• Πότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με δύο αγνώστους ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα $3x3$;

• Με ποιά μέθοδο λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα $3x3$;

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λύσετε το παρακάτω γραμμικό $3x3$ σύστημα.**

$$\begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11 \\ 2x - 5y - 2\omega = 3 \\ 5x + y - 2\omega = 33 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

## 1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

• Με ποια μέθοδο λύνουμε τα μη γραμμικά συστήματα ;

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λύσετε το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα.**

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ x \cdot y = 6 & (2) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λύσετε το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \cdot y = 6} & \textbf{(1)} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = 13} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

# Κεφάλαιο 2

# ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία-Άλγεβρα $2^o$ κεφάλαιο

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

## 2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Μια συνάρτηση $f$ λέγεται* ***γνησίως αύξουσα*** *σε ένα διάστημα $\Delta$ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) \ldots\ldots f(x_2)$*

• Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta$ γράφουμε $f \ldots\ldots \Delta$

• Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha \ldots\ldots$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$**

ΛΥΣΗ

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Μια συνάρτηση $f$ λέγεται* ***γνησίως φθίνουσα*** *σε ένα διάστημα $\Delta$ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει : $f(x_1) \ldots\ldots f(x_2)$*

• Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta$ γράφουμε $f \ldots\ldots \Delta$

• Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha \ldots\ldots$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

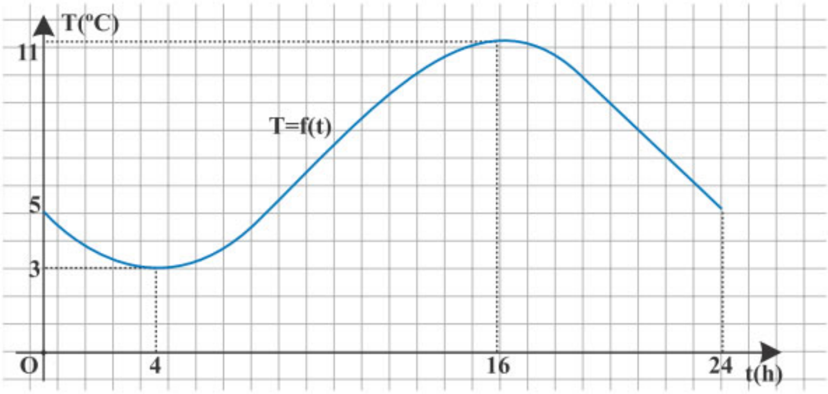
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $f$**




ΛΥΣΗ

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Μια συνάρτηση $f$, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A$, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathbb{A}$ (ολικό) ελάχιστο όταν: $f(x) \ldots\ldots f(x_0)$, για κάθε $x \in \ldots.$*

*Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο ή απλώς ελάχιστο της συνάρτησης $f$ και το συμβολίζουμε με $\ldots\ldots f(x)$.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να βρείτε το ελάχιστο καθώς και την θέση ελαχίστου της $\boldsymbol{f(x) = 3x^4 + 1}$**

ΛΥΣΗ

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Μια συνάρτηση $f$, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A$, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathbb{A}$ (ολικό) μέγιστο όταν: $f(x) \ldots\ldots f(x_0)$, για κάθε $x \in \ldots.$*

*Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό μέγιστο ή απλώς μέγιστο της συνάρτησης $f$ και το συμβολίζουμε με $\ldots\ldots f(x)$.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

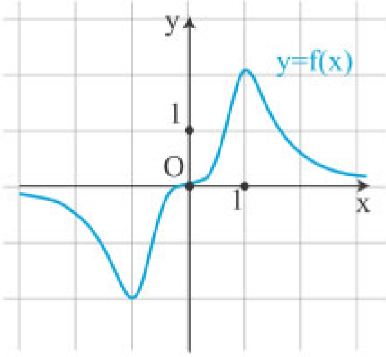
**Να βρείτε το μέγιστο καθώς και την θέση μεγίστου της $\boldsymbol{f(x) = -3x^4 + 1}$**

ΛΥΣΗ

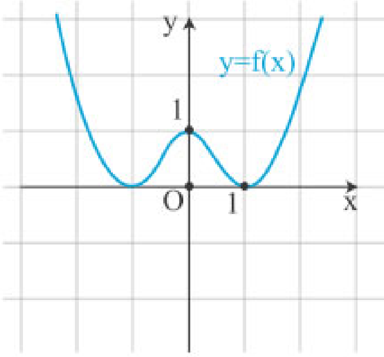
• Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται ολικά . . . . . . . . . . . . . . . . . . . αυτής.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

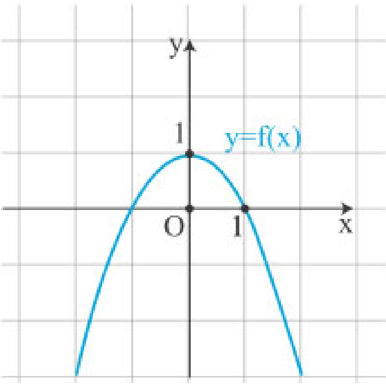
**Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f$ στα παρακάτω σχήματα**



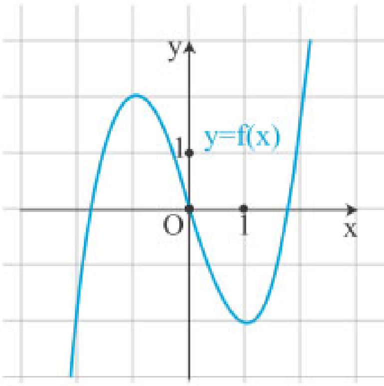

*Σχήμα α΄*




*Σχήμα β΄*




*Σχήμα γ΄*




*Σχήμα δ΄*

## ΛΥΣΗ

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Μια συνάρτηση $f$, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A$, θα λέγεται* ***άρτια****, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:*

- ✦ $-x \in A$ *και* . . . . . . . . .
- ✦ $f(-x) =$ . . . . . . . . .

*Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα* . . . . . . . . .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ είναι άρτια.**

ΛΥΣΗ

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Μια συνάρτηση $f$, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A$, θα λέγεται* **περιττή**, *όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:*

- ✦ $-x \in A$ *και* .........
- ✦ $f(-x) =$ .........

*Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την ...... των αξόνων.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x$ είναι περιττή.**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης $f$ που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-6, 6]$.**
**Να χαραχθούν και τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ και με τη βοήθεια αυτής:**

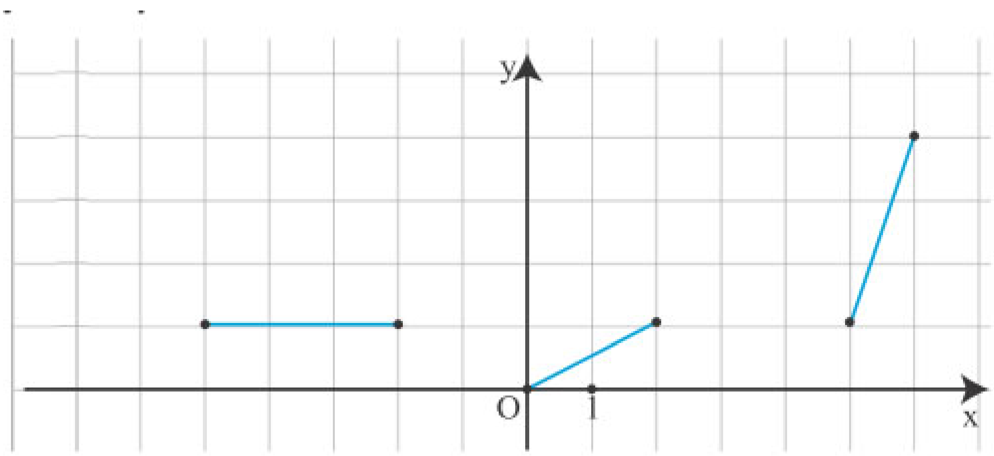
$\alpha$) **Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f$ :**

ι) **είναι γνησίως αύξουσα.**

ιι) **είναι γνησίως φθίνουσα.**

ιιι) **είναι σταθερή.**

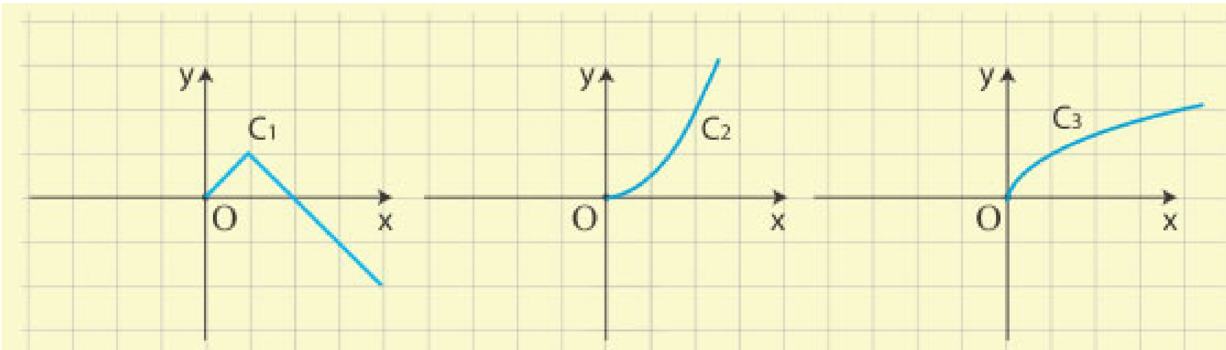
$\beta$) **Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $f$, καθώς επίσης οι θέσεις των ακροτάτων αυτών.**



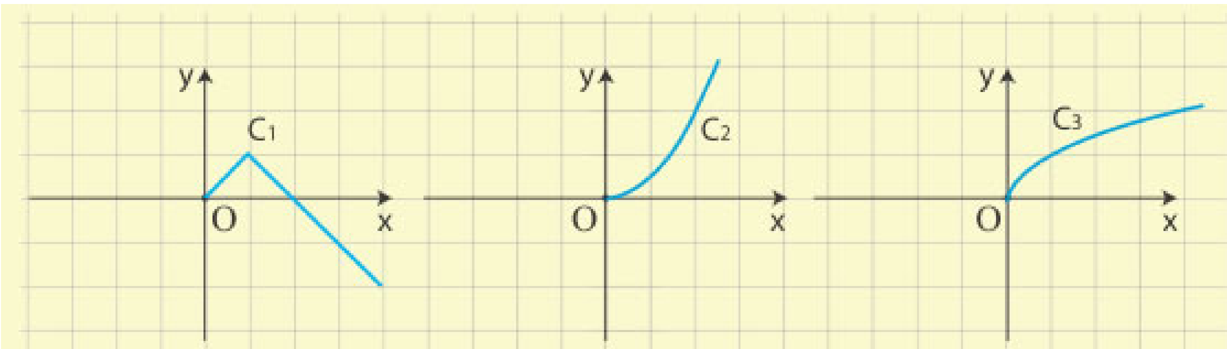
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις $\alpha$) Άρτιας συνάρτησης και $\beta$) Περιττής συνάρτησης.

**ΑΡΤΙΑ**



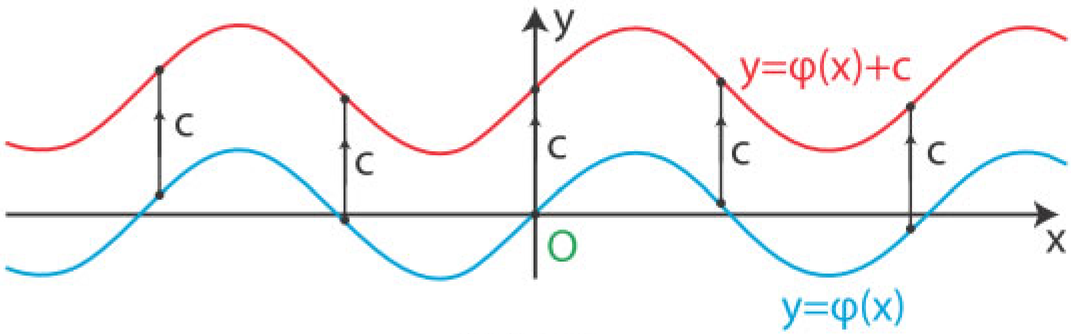

**ΠΕΡΙΤΤΗ**




## 2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

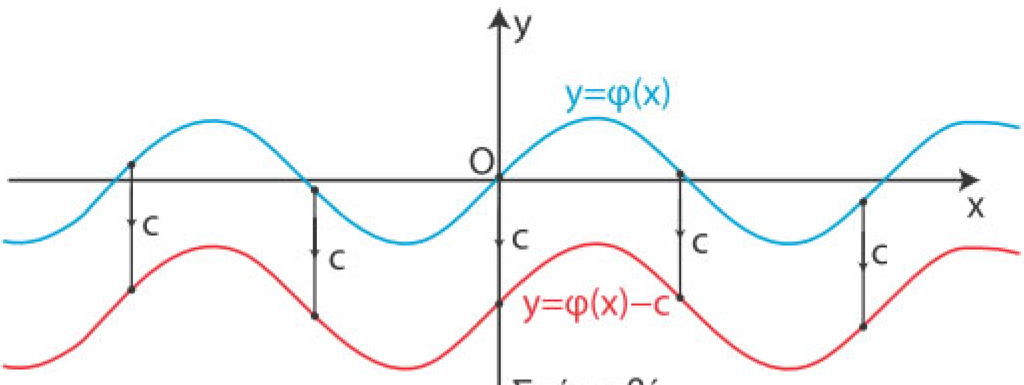
**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, με: $f(x) = \phi(x) + c$, όπου $c > 0$ , προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\phi$ κατά $c$ μονάδες προς τα* ........................................................

..................................................................................................



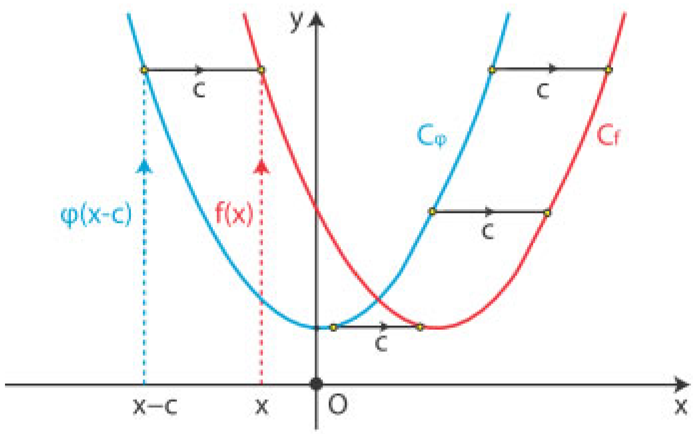

*Σχήμα α΄*

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f$ *, με:* $f(x) = \phi(x) + c$*, όπου* $c < 0$ *, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της* $\phi$ *κατά* $c$ *μονάδες προς τα* ...............



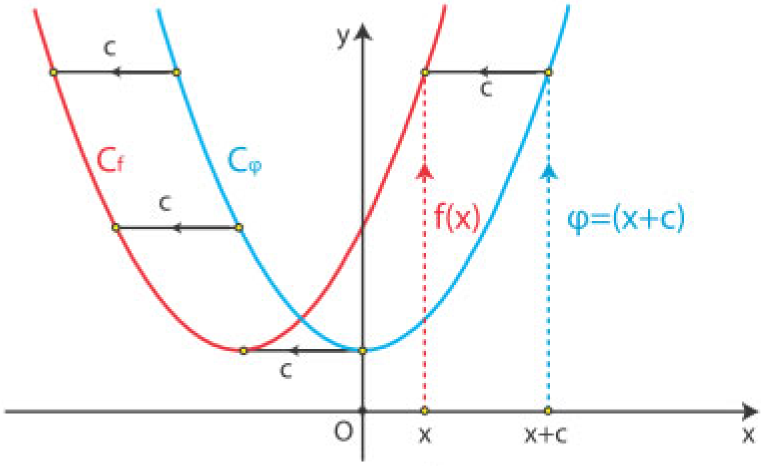

Σχήμα β΄

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f$ *, με:* $f(x) = \phi(x - c)$*, όπου* $c > 0$ *, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της* $\phi$ *κατά* $c$ *μονάδες προς τα* ...............




*Σχήμα γ΄*

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ , με: $f(x) = \phi(x+c)$, όπου $c > 0$ , προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\phi$ κατά $c$ μονάδες προς τα ................*

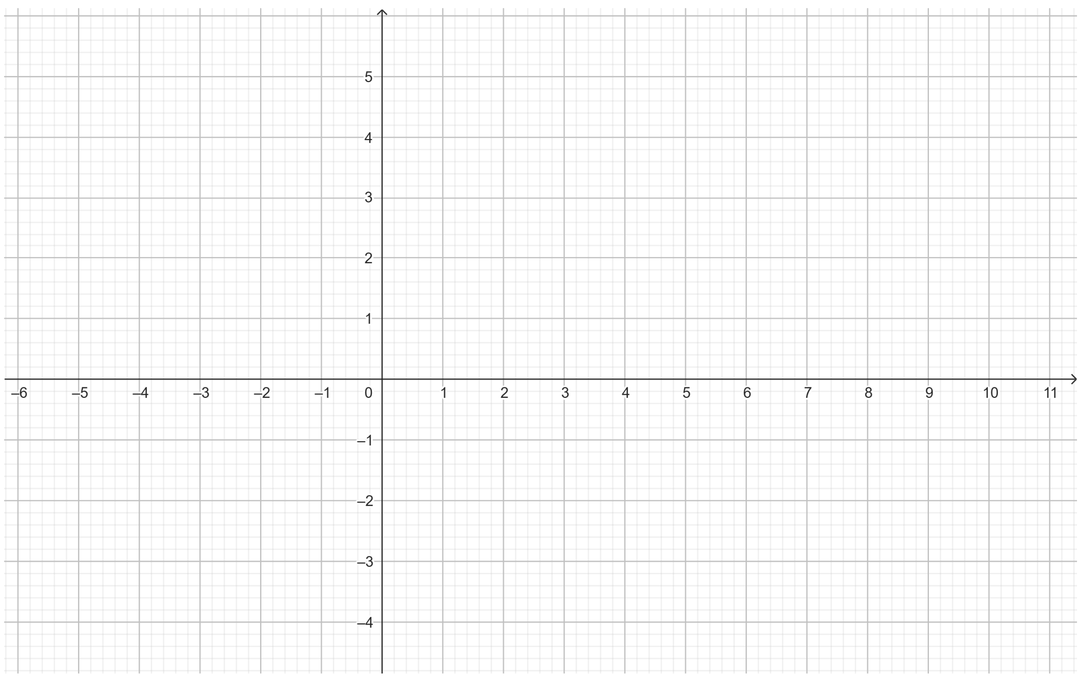



*Σχήμα δ΄*

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να παραστεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = |x+3|+2$**

ΛΥΣΗ



## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ στη μορφή $f(x) = \alpha(x - p)^2 + q$ και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f$.**

ΛΥΣΗ

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

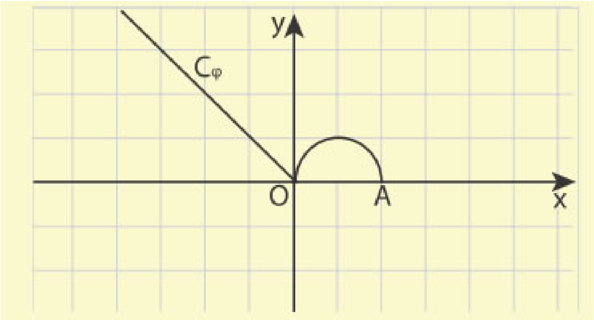
**Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :**

$i) \boldsymbol{f(x) = \phi(x) + 2}$ και $\boldsymbol{g(x) = \phi(x) - 2}$

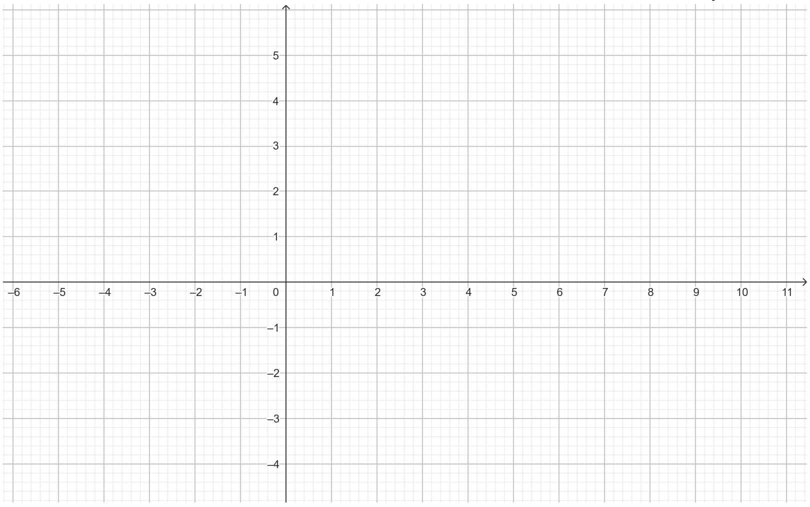
$ii) \boldsymbol{h(x) = \phi(x + 3)}$ και $\boldsymbol{q(x) = \phi(x - 3)}$

$iii) \boldsymbol{F(x) = \phi(x + 3) + 2}$ και $\boldsymbol{G(x) = \phi(x - 3) - 2}$.

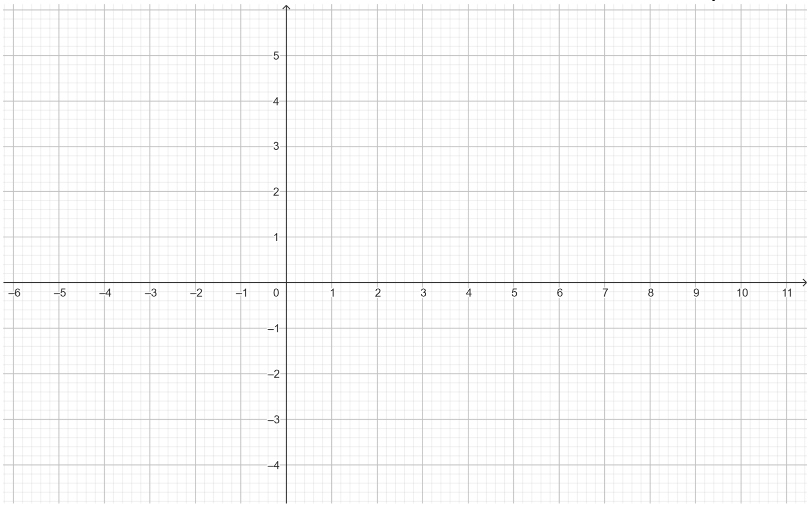
**Γραφική παράσταση της** $\phi(x)$



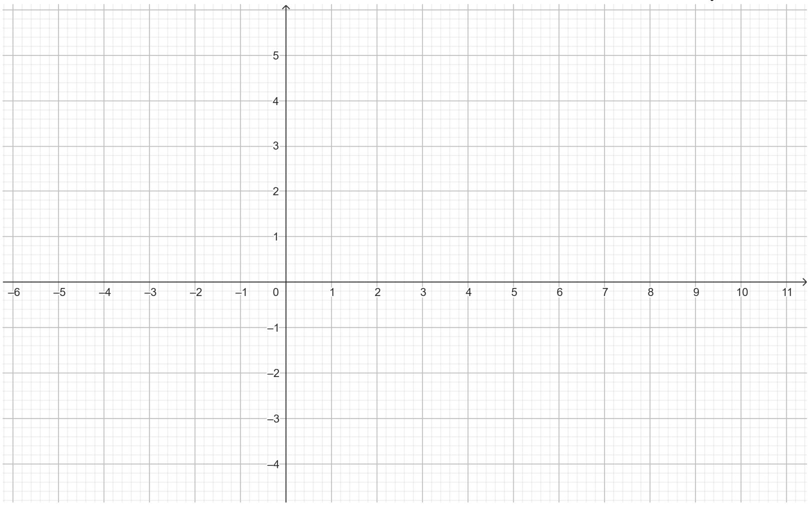
**ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ $f$ και της $g$**



**ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ $h$ και της $q$**



**ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ $F$ και της $G$**



# Κεφάλαιο 3

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ Β'ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία-Άλγεβρα $3^o$ κεφάλαιο

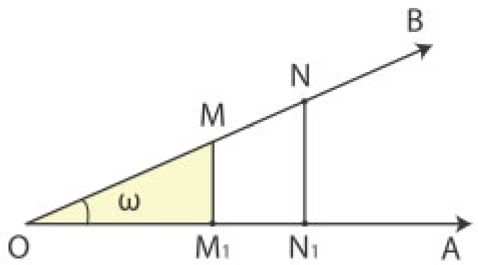
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

## 3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

• Να συμπληρώσετε τις σχέσεις για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega$ στο τρίγωνο $MOM_1$.

✦ $\eta\mu\omega = \dfrac{\dots}{\dots}$ $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\dots}{\dots}$ $\epsilon\phi\omega = \dfrac{\dots}{\dots}$ $\sigma\phi\omega = \dfrac{\dots}{\dots}$




Άρα :

• $\eta\mu\omega = \dfrac{\text{ΑΠΕΝΑΝΤΙ}\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$

• $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\text{ΠΡΟΣΚΕΙΜΕΝΗ}\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$

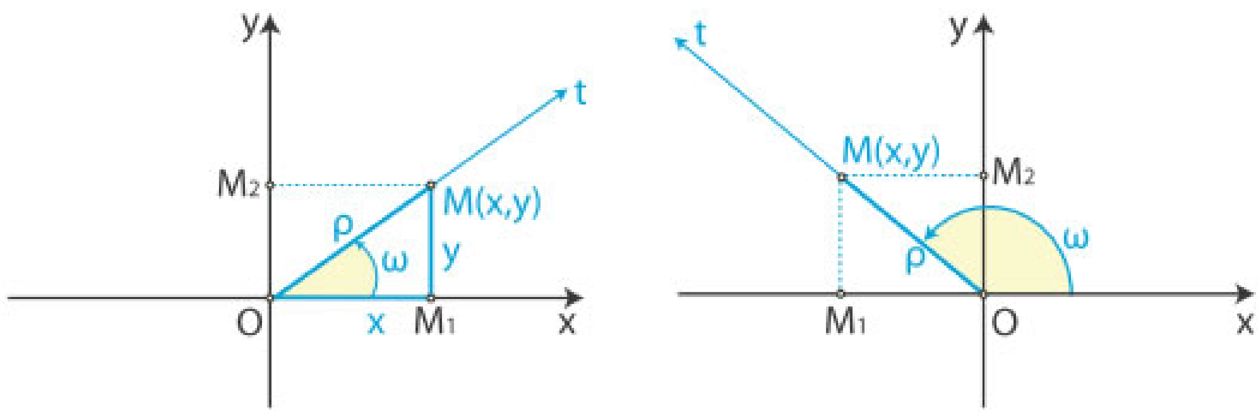
- $\epsilon\phi\omega = \dfrac{\text{ΑΠΕΝΑΝΤΙ}\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$
- $\sigma\phi\omega = \dfrac{\text{ΠΡΟΣΚΕΙΜΕΝΗ}\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\omega$, με $0^o \leq \omega \leq 360^o$

- Να συμπληρώσετε τις σχέσεις για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega$ στο τρίγωνο $MOM_1$.

✦ $\eta\mu\omega = \dfrac{\ldots}{\ldots}$ $\quad \sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\ldots}{\ldots}$ $\quad \epsilon\phi\omega = \dfrac{\ldots}{\ldots}$ $\quad \sigma\phi\omega = \dfrac{\ldots}{\ldots}$

με $\rho = \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$




Σχήμα α΄ Σχήμα β΄

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των $360^0$ και αρνητικών γωνιών

- Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θα ισχύει :

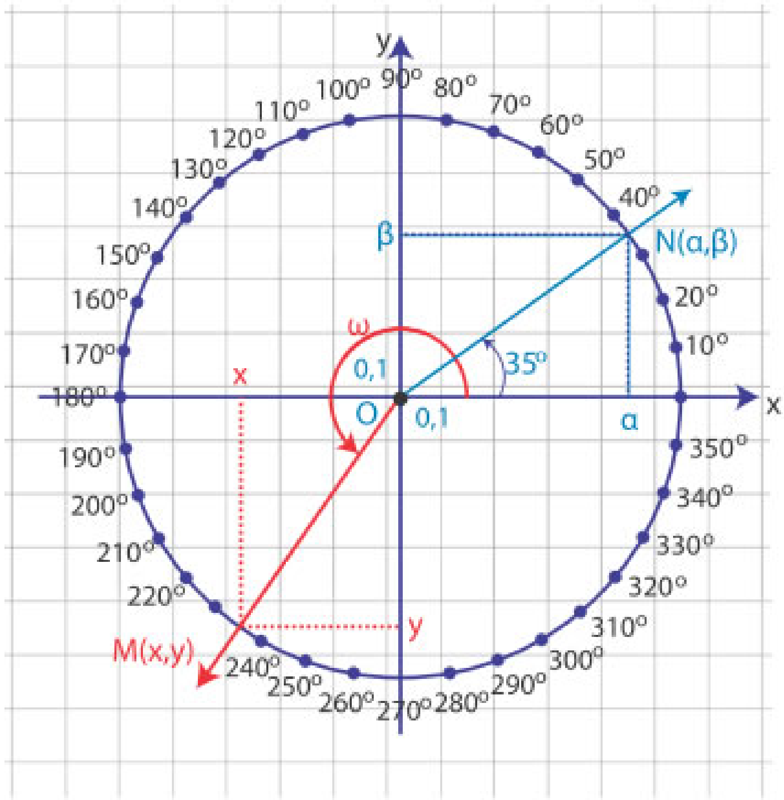
$\eta\mu(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \ldots\ldots\ldots$

$\epsilon\phi(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \sigma\phi(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \ldots\ldots\ldots$

### Ο τριγωνομετρικός κύκλος

- Με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα $\rho = 1$ γράφουμε έναν κύκλο. Ο κύκλος αυτός λέγεται ................................. κύκλος.

.............................................................................................




• Γενικότερα, αν η τελική πλευρά μιας γωνίας $\omega$ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τότε ισχύει:

✦ $\sigma\upsilon\nu\omega = x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$του σημείου Μ

✦ $\eta\mu\omega = y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$του σημείου Μ

• Για το λόγο αυτό ο άξονας $x'x$ λέγεται και άξονας των ......................, ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται και άξονας των ..........................................................................

• Ισχύουν οι σχέσεις $\boldsymbol{-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1}$ και $\boldsymbol{-1 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq 1}$

• Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας $\omega$, ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας.

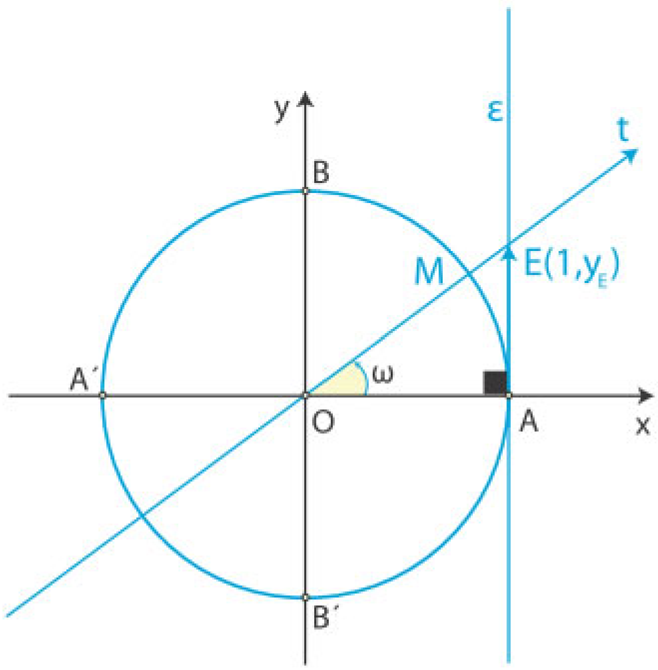
| | 1° | 2° | 3° | 4° |
|---|---|---|---|---|
| **ημω** | + | + | – | – |
| **συνω** | + | – | – | + |
| **εφω** | + | – | + | – |
| **σφω** | + | – | + | – |

### Ο άξονας των εφαπτομένων

• $\epsilon\phi\omega = \dfrac{AE}{OA} = \dfrac{y_E}{1} = \ldots\ldots$

• Άρα $\epsilon\phi\omega = y_E = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ του σημείου Ε.

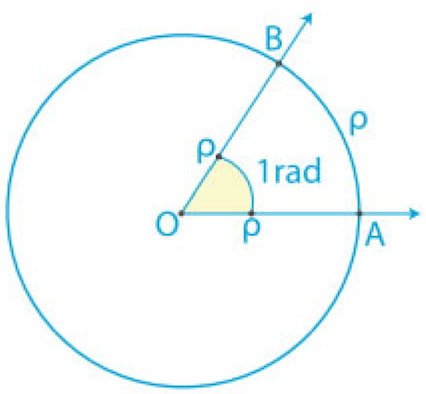
• Για το λόγο αυτό η ευθεία $\epsilon$, που έχει εξίσωση $x = 1$ , λέγεται άξονας των $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$




### Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Ακτίνιο (ή 1 rad ) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad)*

• Το τόξο $\alpha$ ακτινίων (ή $\alpha$ $rad$) έχει μήκος $S = \alpha\ldots\ldots\ldots$

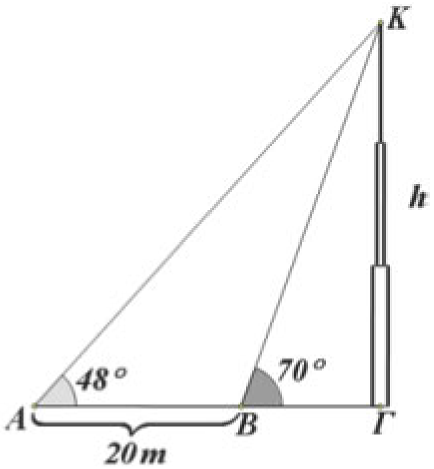



• Η σχέση που συνδέει μοίρες και ακτίνια είναι: $\dfrac{\ldots}{\pi} = \dfrac{\mu}{\ldots}$

| Γωνία ω | | Τριγωνομετρικοί αριθμοί | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| σε μοίρες | σε rad | ημω | συνω | εφω | σφω |
| $0^\circ$ | 0 | 0 | 1 | 0 | Δεν ορίζεται |
| $30^\circ$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $45^\circ$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| $60^\circ$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $90^\circ$ | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | Δεν ορίζεται | 0 |

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Οι μετρήσεις που έκανε ένας μηχανικός για να βρει το ύψος $h$ ενός καμπαναριού ΓΚ φαίνονται στο σχήμα. Να υπολογιστεί το ύψος του καμπαναριού σε μέτρα.
**Δίνονται :$\epsilon\phi 70^0 \simeq 2.75$ και $\epsilon\phi 48^0 \simeq 1.11$.**



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $750^0$.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\frac{79\pi}{3}rad$.**

## 3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $$\eta\mu^2\omega + \ldots\ldots\ldots = 1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- $$\epsilon\phi\omega = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- $$\sigma\phi\omega = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

- $$\epsilon\phi\omega \cdot \epsilon\phi\omega = \ldots$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

- $$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\cdots\cdots}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

- $$\eta\mu^2\omega = \frac{\cdots\cdots}{1+\cdots\cdots}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Αν $\eta\mu\omega = \dfrac{5}{13}$ και $90^0 < \omega < 180^0$ να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega$.**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να αποδείξετε ότι :**

- $\eta\mu^4 + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\sigma\upsilon\nu^2\omega$

  ΛΥΣΗ

- $\eta\mu^4 - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$

  ΛΥΣΗ

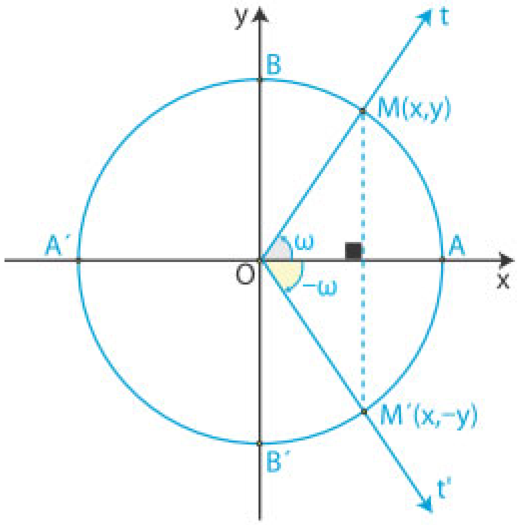
## 3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ $1^0$ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

**Γωνίες αντίθετες**

• Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ......... συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \eta\mu(-\omega) = \ldots\ldots\ldots$

$\epsilon\phi(-\omega) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \sigma\phi(-\omega) = \ldots\ldots\ldots$

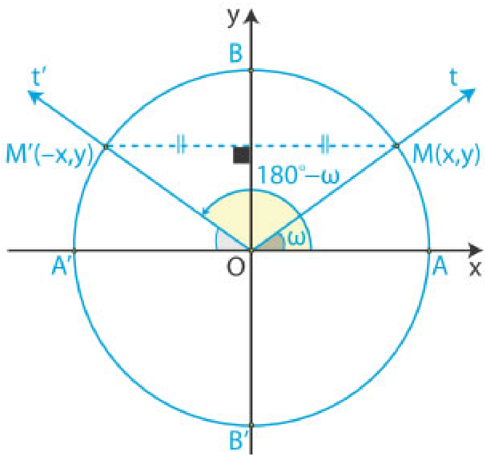



**Γωνίες με άθροισμα** $180^0$

• Οι γωνίες με άθροισμα $180^0$ έχουν το ......... ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\sigma\upsilon\nu(180^0 - \omega) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \eta\mu(180^0 - \omega) = \ldots\ldots\ldots$

$\epsilon\phi(180^0 - \omega) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad \sigma\phi(180^0 - \omega) = \ldots\ldots\ldots$

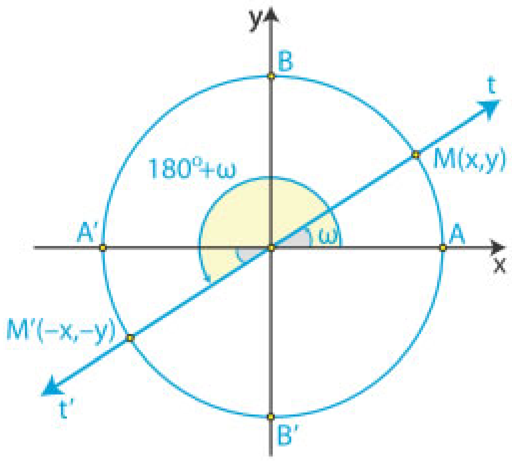


**Γωνίες που διαφέρουν κατά** $180^0$

• Οι γωνίες που διαφέρουν κατά $180^0$ έχουν ............ ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

$\sigma\upsilon\nu(180^0 + \omega) = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad \eta\mu(180^0 + \omega) = \ldots\ldots\ldots$

$\epsilon\phi(180^0 + \omega) = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad \sigma\phi(180^0 + \omega) = \ldots\ldots\ldots$

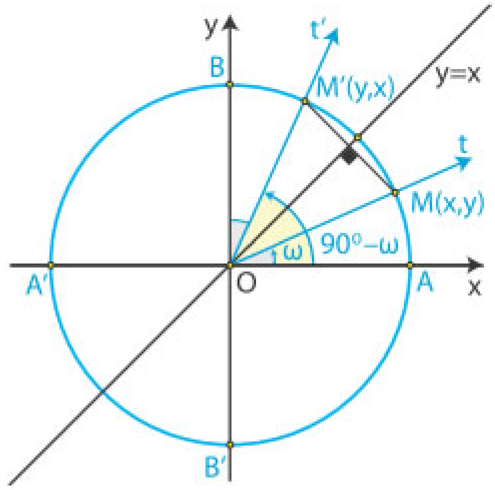



**Γωνίες με άθροισμα** $90^0$

• Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα $90^0$ , τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το ............... της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη .................. της άλλης.

$\sigma\upsilon\nu(90^0 - \omega) = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad \eta\mu(90^0 - \omega) = \ldots\ldots\ldots$

$\epsilon\phi(90^0 - \omega) = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad \sigma\phi(90^0 - \omega) = \ldots\ldots\ldots$




..........................................................................................

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu 36^0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ . Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $54^0$.**

ΛΥΣΗ

## 3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**ΟΡΙΣΜΟΣ.** *Περιοδικές συναρτήσεις*
*Μία συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού το $A$ λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει:*

- ✦ $x+T\in A$, $x-T\in A$ *και*
- ✦ $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

*Ο πραγματικός αριθμός $T$ λέγεται ............ της συνάρτησης $f$.*

• Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός $x$ αντιστοιχίζεται στο ...... λέγεται συνάρτηση ημίτονο και συμβολίζεται με $\eta\mu$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Αποδείξτε ότι η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο $2\pi$.**

ΛΥΣΗ

• Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός $x$ αντιστοιχίζεται

.................................................................................................

στο ...... λέγεται συνάρτηση συνημίτονο και συμβολίζεται με $συν$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Αποδείξτε ότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π.**

ΛΥΣΗ

• Η συνάρτηση εφαπτομένη που συμβολίζεται με ......, ορίζεται ως εξής:

$$\epsilon\phi(x) = \frac{\cdots}{\cdots}$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\epsilon\phi$ είναι το σύνολο:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Αποδείξτε ότι η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π.**

ΛΥΣΗ

• Η συνάρτηση συνεφαπτομένη που συμβολίζεται με ......, ορίζεται ως εξής:

$$\sigma\phi(x) = \frac{\cdots}{\cdots}$$

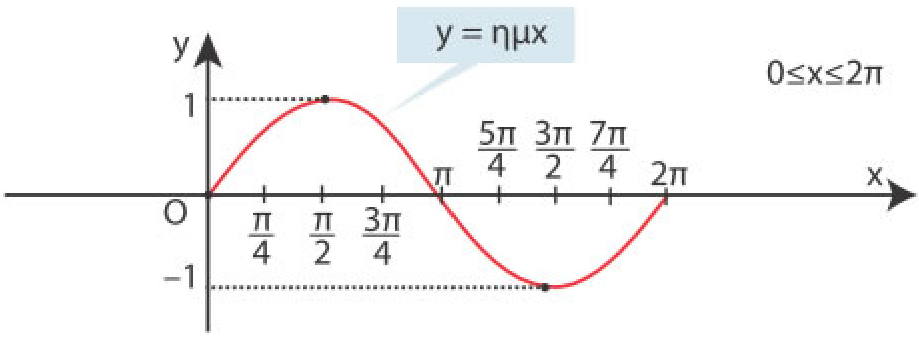
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sigma\phi$ είναι το σύνολο:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Αποδείξτε ότι η συνάρτηση συνεφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π.**

ΛΥΣΗ

**Μελέτη της συνάρτησης** $f(x) = \eta\mu x$

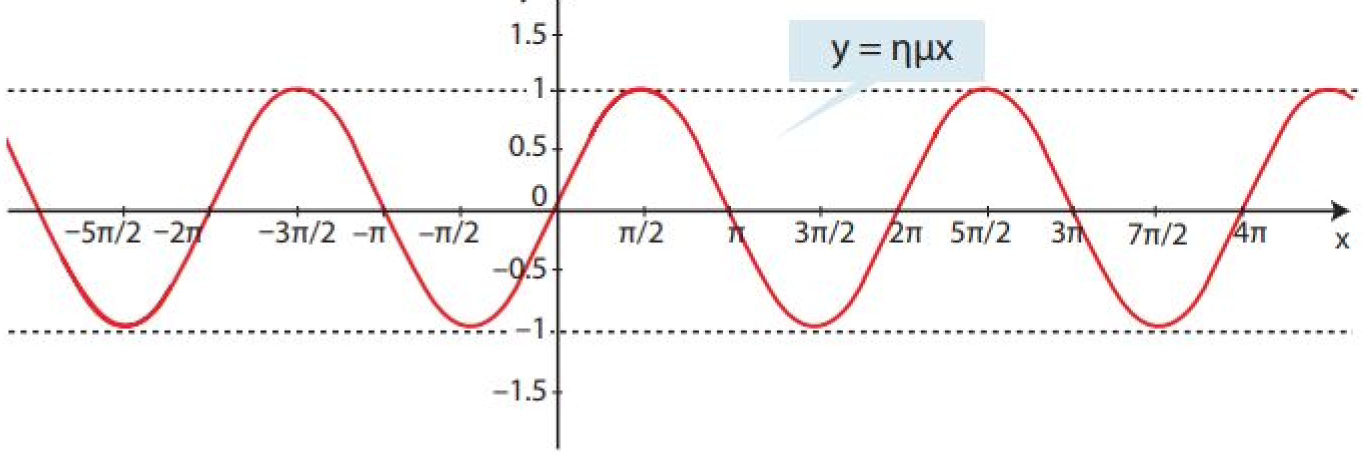



| x | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ημx | 0 | ↗ | 1 μεγ. | ↘ | 0 | ↘ | −1 ελαχ. | ↗ | 0 |

• Τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = \eta\mu x$ είναι :

• $max f = \ldots$ και $min f = \ldots$

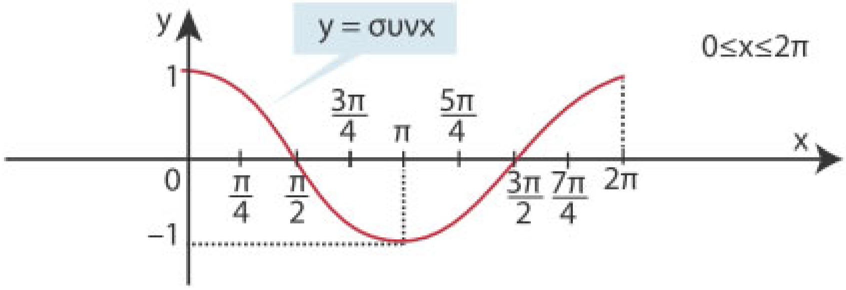
• Η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi$ άρα το γραφημά της συνεχίζεται στο $\mathbb{R}$ και παράγει μία ημιτονοειδής ........................




..........................................................................................

• Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετα ημίτονα. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι ............ και επομένως η γραφική της παράσταση έχει ............συμμετρίας .............. των αξόνων.

**Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$**

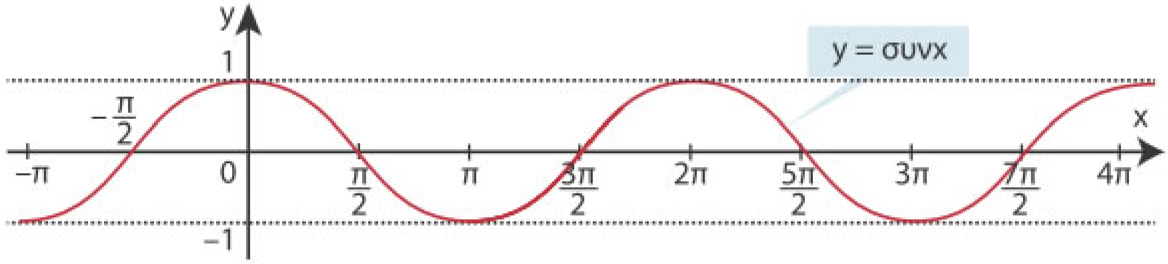



| x | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ | | π | | $\frac{3\pi}{2}$ | | 2π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| συνx | 1 μεγ. | ↘ | 0 | ↘ | −1 ελαχ. | ↗ | 0 | ↗ | 1 μεγ. |

• Τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι :

• $maxf = \ldots$ και $minf = \ldots$

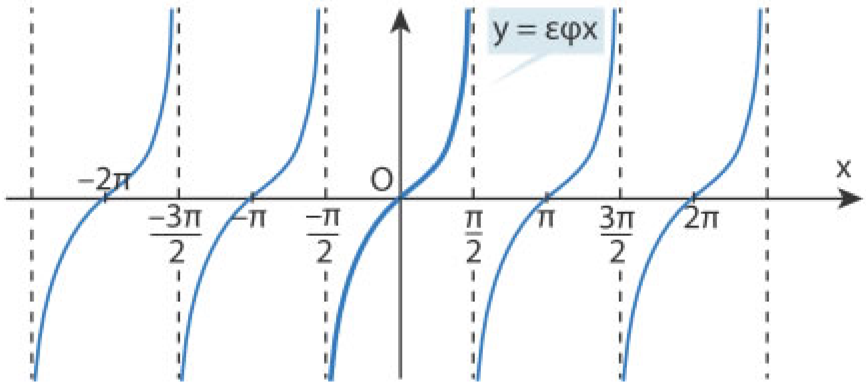
• Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi$ άρα το γραφημά της συνεχίζεται στο $\mathbb{R}$ και παράγει μία συνημιτονοειδής ...............




• Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ...... συνημίτονα. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι ............ και επομένως η γραφική της παράσταση έχει ............συμμετρίας ...............

....................................................................................................

**Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \epsilon\phi x$**



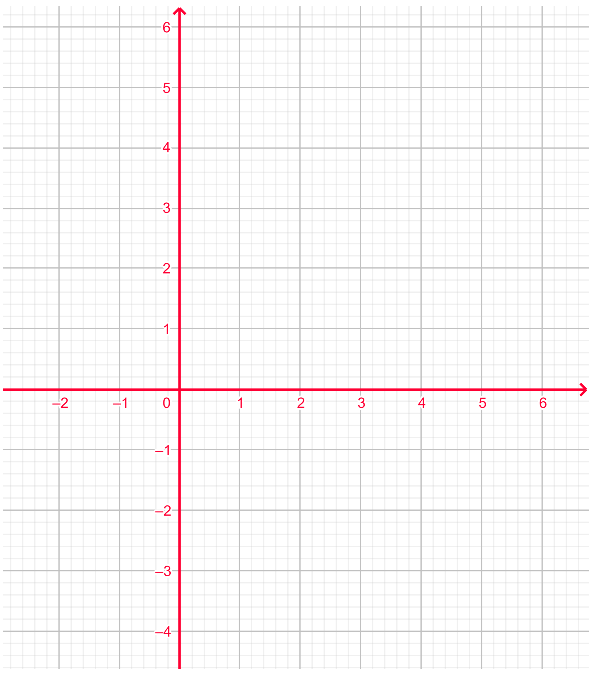

• Η $\epsilon\phi x$ είναι γνησίως ............ σε κάθε διάστημα που ορίζεται.Επίσης ισχύει $\epsilon\phi(-x) = -\epsilon\phi x$ άρα είναι ............ και έχει κέντρο συμμετρίας ..............................

• Οι ευθείες της μορφής $x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$ αποτελούν κατακόρυφες .................. για την γραφική παράσταση της $\epsilon\phi x$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu x$.**

ΛΥΣΗ

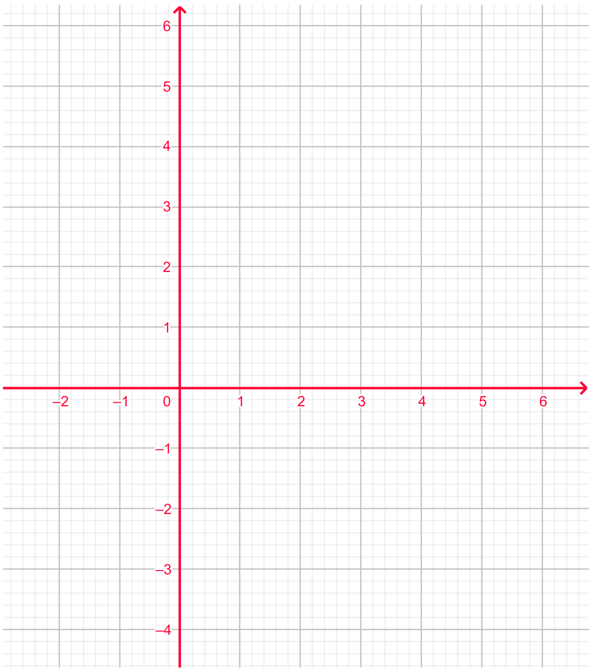



..........................................................................................

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$.**

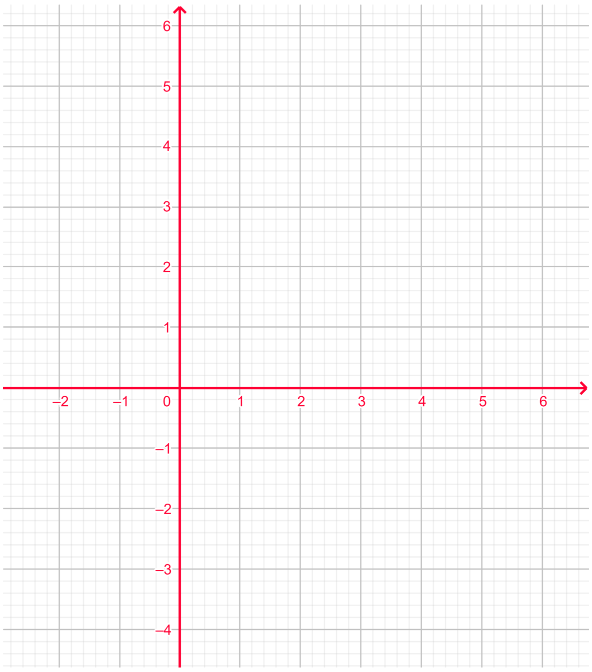
ΛΥΣΗ



## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu 2x$.**

ΛΥΣΗ



● Άρα σε μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho\,\eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$

✦ Το $\rho$ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με … και την

……………………………………………………………………………………………

ελάχιστη τιμή της που είναι ίση με ...

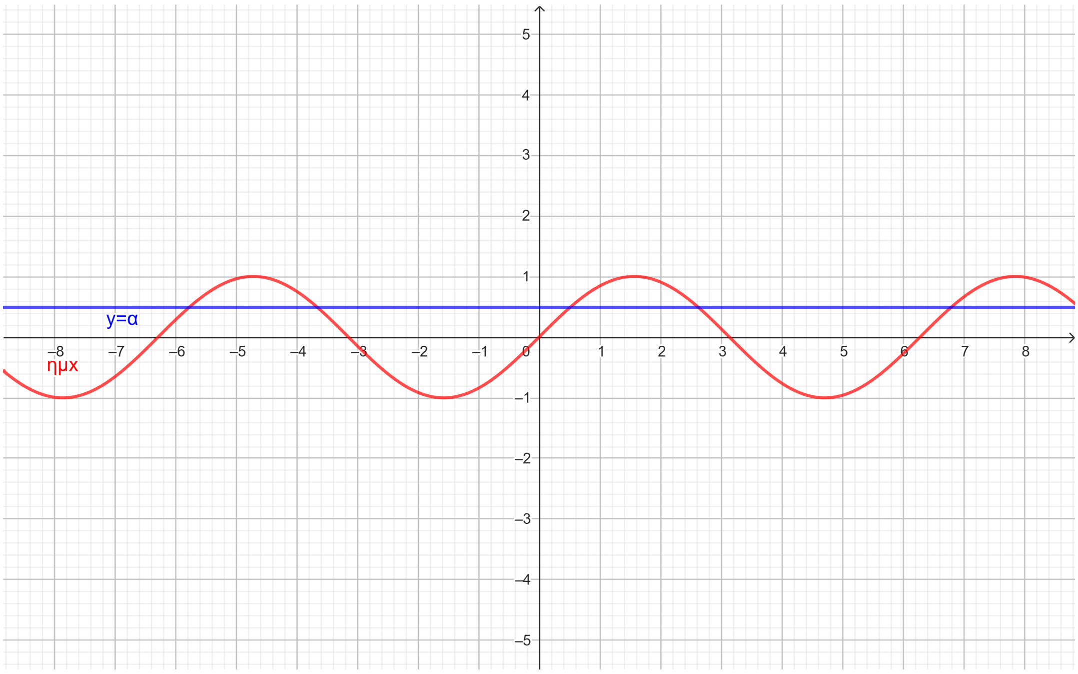
✦ Το $\omega$ καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι ίση με $T = \frac{\dots}{\dots}$

• Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho\, \sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

## 3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**Η εξίσωση** $\eta\mu x = \alpha$

• Ζητάμε να βρούμε τις τετμημένες των σημείων ......... της καμπύλης $y = \eta\mu x$ και της ευθείας $y = \alpha$




• Γενικότερα, αν $\theta$ είναι μία λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = \alpha$, αν δηλαδή ισχύει $\eta\mu x = \eta\mu\theta$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x = 2\kappa\pi + \theta$$

ή

$$x = 2\kappa\pi + \pi - \theta\ , \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση** $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

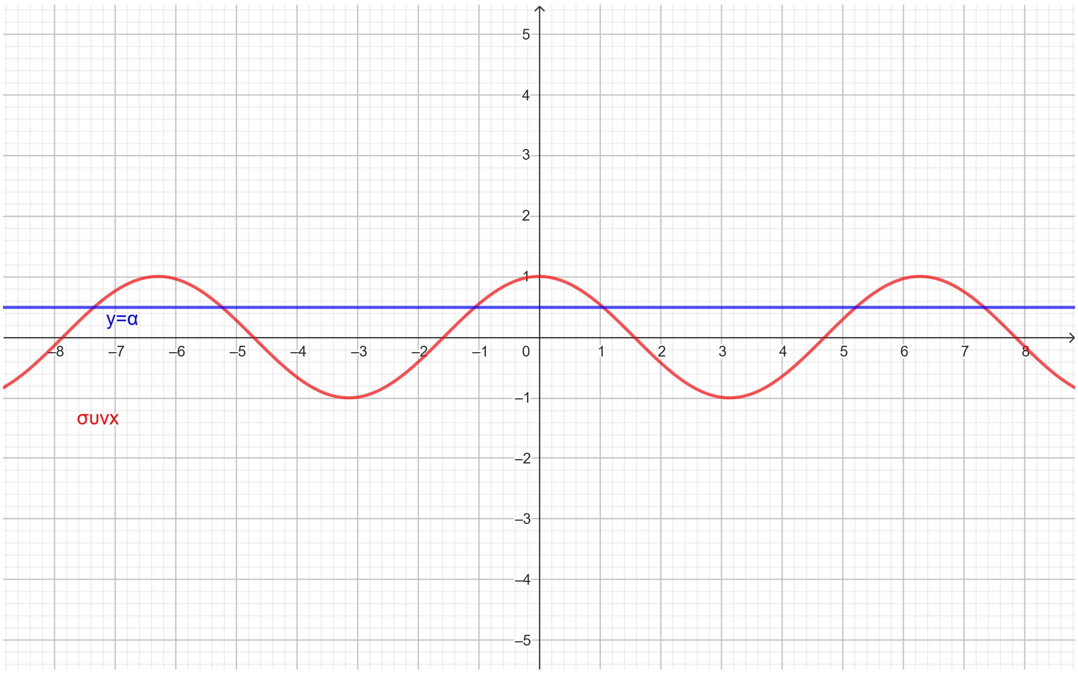
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση** $\eta\mu(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

**Η εξίσωση** $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$

• Ζητάμε να βρούμε τις τετμημένες των σημείων . . . . . . . . . της καμπύλης $y = \sigma\upsilon\nu x$ και της ευθείας $y = \alpha$




• Γενικότερα, αν $\theta$ είναι μία λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$, αν δηλαδή ισχύει $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x = 2\kappa\pi + \theta$$

ή

$$x = 2\kappa\pi - \theta \, , \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση** $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

ΛΥΣΗ

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

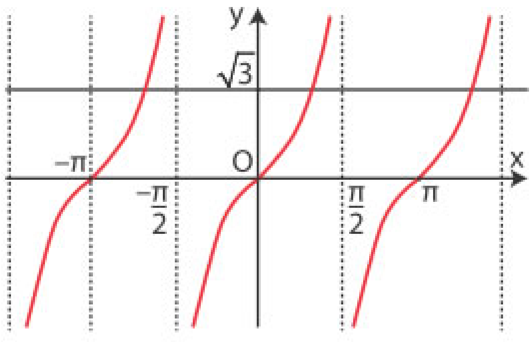
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$**

ΛΥΣΗ

**Η εξίσωση** $\varepsilon\phi x = \alpha$

• Ζητάμε να βρούμε τις τετμημένες των σημείων ......... της γραφικής παράστασης της $y = \varepsilon\phi x$ και της ευθείας $y = \alpha$




• Γενικότερα, αν $\theta$ είναι μία λύση της εξίσωσης $\varepsilon\phi x = \alpha$, αν δηλαδή ισχύει $\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\theta$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x = \kappa\pi + \theta \ , \kappa \in \mathbb{Z}$$

• Ο ίδιος τύπος λύσεων ισχύει και για την εξίσωση $\sigma\phi x = \alpha$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση $\epsilon\phi x = -1$**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\phi x = \sqrt{3}$**

ΛΥΣΗ

# Κεφάλαιο 4

# ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

μαθηματικά Β' λυκείου

Θεωρία-Άλγεβρα $4^o$ κεφάλαιο

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

## 4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

### Η έννοια του πολυωνύμου

• Έστω $x$ μια ................ που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή ,τότε :

✦ Καλούμε μονώνυμο του $x$ κάθε παράσταση της μορφής ......, όπου $\alpha$ είναι ένας πραγματικός αριθμός και $\nu$ ένας θετικός ακέραιος. Μονώνυμο του $x$ καλούμε επίσης και κάθε ................ αριθμό.

✦ Καλούμε πολυώνυμο του $x$ κάθε παράσταση της μορφής:

$$\ldots + \ldots + \ldots \ldots + \ldots + \ldots$$

όπου $\nu$ είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

✦ Τα πολυώνυμα της μορφής $\alpha_0$, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται ................ πολυώνυμα. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται ................... πολυώνυμο.

• Δυο πολυώνυμα $\alpha_\mu x^\mu + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $\beta_\nu x^\nu + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ ,με $\mu \geq \nu$ ,θα λέμε ότι είναι ίσα όταν :

...................................................................

• Έστω τώρα ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$.
Αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με μηδέν, τότε το $P(x)$ είναι ίσο με το πολυώνυμο 0 (............... πολυώνυμο) και λέμε ότι δεν έχει .............
Σε κάθε άλλη περίπτωση ο βαθμός του είναι ίσος με τον εκθέτη του ......................... όρου με συντελεστή ... 0.

• Έστω ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Αν αντικαταστήσουμε το $x$ με ένα ορισμένο πραγματικό αριθμό $\rho$, τότε ο πραγματικός αριθμός $P(\rho)$ που προκύπτει λέγεται ..................... τιμή ή απλά τιμή του πολυωνύμου για $x = \ldots$.

• Αν είναι $P(\rho) = 0$, τότε ο $\rho$ λέγεται ............ του πολυωνύμου.

• Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το ............ των βαθμών των δυο πολυωνύμων.

• Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το ................ των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u>

**Να βρεθούν οι τιμές του $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο :**

**$\boldsymbol{P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1}$ ,είναι το μηδενικό πολυώνυμο.**

<u>ΛΥΣΗ</u>

ΕΦΑΡΜΟΓΗ **Να βρεθούν οι τιμές του $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα :**
$\boldsymbol{Q(x) = \lambda^2 x^3 + (\lambda - 2)x^2 + 3}$ **και**
$\boldsymbol{R(x) = (5\lambda - 6)x^3 + (\lambda^2 - 4)x^2 + \lambda + 1}$ **,είναι ίσα.**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Αν** $\boldsymbol{P(x) = x^2 + 3x + \alpha^2 - 1}$**, να βρεθούν οι τιμές του** $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ **για τις οποίες ισχύει** $\boldsymbol{P(-1) = -1}$.

ΛΥΣΗ

## 4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** *(Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:*

$$\Delta(x) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.*

• Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το $\Delta(x)$ λέγεται …………, το $\delta(x)$ …………, το $\pi(x)$ ………… και το $\upsilon(x)$ …………… της διαίρεσης.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να διαιρέσετε κάθετα το πολυωνύμο $x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ με το πολυώνυμο $x - 3$.**

ΛΥΣΗ

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

• Γενικά, αν σε μια διαίρεση είναι $\upsilon(x) = 0$, τότε η διαίρεση λέγεται ………… και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται $\Delta(x) = \ldots\ldots\ldots$ Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το …… διαιρεί το $\Delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ είναι ……… του $\Delta(x)$ ή ότι το $\Delta(x)$ διαιρείται με το …… ή ακόμη ότι το $\delta(x)$ είναι ………… του $\Delta(x)$.

### Διαίρεση πολυωνύμου με $x - \rho$

• Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - \rho$ γράφεται :

$$P(x) = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots + \ldots$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon = \ldots\ldots$*

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το $\rho$ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = \ldots$.*

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα $x+2$ και $x-1$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)=x^3+x^2-x+2$.**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ :**

*i.* **Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=x^3-3x^2+3x-1$ με το $x+\lambda$ είναι το μηδέν.**

*ii.* **Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)=\lambda^2x^4+3\lambda x^2-3$ με το $x-1$ είναι το 1.**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (Σχήμα Horner)

**Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(4x^2 - 8\alpha x + 4\alpha^2) : (x - \alpha)$**

ΛΥΣΗ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | -8$\alpha$ | 4$\alpha^2$ | $\alpha$ |
| | | | |
| | | | |

## 4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

**Παράγοντας της μορφής** $x - \rho$

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** *(ακέραιων ριζών) Έστω η πολυωνυμική εξίσωση* $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, *με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος* $\rho \neq 0$ *είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο* $\rho$ *είναι διαιρέτης του σταθερού όρου* $\alpha_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$.**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4 = 0$.**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $P(x) = (x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)$.**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η ανίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 > 0$.**

ΛΥΣΗ

**Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση**

**ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

*Αν για δυο πραγματικούς αριθμούς $\alpha$, $\beta$ με $\alpha < \beta$ οι τιμές $f(\alpha)$, $f(\beta)$ της συνάρτησης είναι ετερόσημες, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ μεταξύ των $\alpha$, $\beta$.*

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα μεταξύ των αριθμών 1 και 2.**

ΛΥΣΗ

## 4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση**

$$\boldsymbol{x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} = 0}$$

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση**

$$\boldsymbol{\sqrt{x} = x - 2}$$

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση**

$$\boldsymbol{\sqrt{2x+7}-x=2}$$

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση**

$$\boldsymbol{\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1}$$

ΛΥΣΗ

Ανισώσεις της μορφής : $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$

• Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Άρα:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$$

Ομοίως :

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0$$

Ομοίως :

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \leq 0, \quad B(x) \neq 0$$

Ομοίως :

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \geq 0, \quad B(x) \neq 0$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η ανίσωση:**

$$\boldsymbol{\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+x-6} > 0}$$

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η ανίσωση:**

$$\frac{(x^2-4x+3)}{x^2+3x-4} \geq 0$$

ΛΥΣΗ

# Κεφάλαιο 5

# ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

μαθηματικά Β΄ λυκείου

**Θεωρία-Άλγεβρα $5^o$ κεφάλαιο**

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

## 5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

### Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

- Αν $\alpha > 0$, $\mu$ ακέραιος και $\nu$ θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε :

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \ldots\ldots$$

- Επιπλέον, αν $\mu$, $\nu$, θετικοί ακέραιοι, ορίζουμε : $0^{\frac{\mu}{\nu}} = \ldots$

### Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

- Μπορούμε για παράδειγμα να ορίσουμε την $3^{\sqrt{2}}$;

.................................................................................................

### ιδιότητες και ορισμοί δυνάμεων

Πίνακας 5.1: ιδιότητες δυνάμεων

| | |
|---|---|
| $\alpha^x \cdot \alpha^y$ | $=$ |
| $\dfrac{\alpha^x}{\alpha^y}$ | $=$ |
| $\alpha^x \cdot \beta^x$ | $=$ |
| $\dfrac{\alpha^x}{\beta^x}$ | $=$ |
| $(\alpha^x)^y$ | $=$ |

Πίνακας 5.2: ορισμοί δυνάμεων

| | |
|---|---|
| $\alpha^0$ | $= \dots \quad ,\alpha \neq 0$ |
| $\alpha^1$ | $=$ |
| $\alpha^{-1}$ | $= \dfrac{\dots}{\dots} \,,\alpha \neq 0$ |
| $\alpha^{-\nu}$ | $=$ |

### Εκθετική συνάρτηση

• Έστω $\alpha$ ένας θετικός αριθμός. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη $\alpha^x$, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dots\dots$$

η οποία, στην περίπτωση που είναι $\alpha \neq 1$, λέγεται ............ συνάρτηση με βάση .......

Αν είναι $\alpha = 1$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = \dots$

• Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \alpha^x \qquad , \mu\epsilon\ \alpha > 1$$

*i.* Έχει πεδίο ορισμού το ...

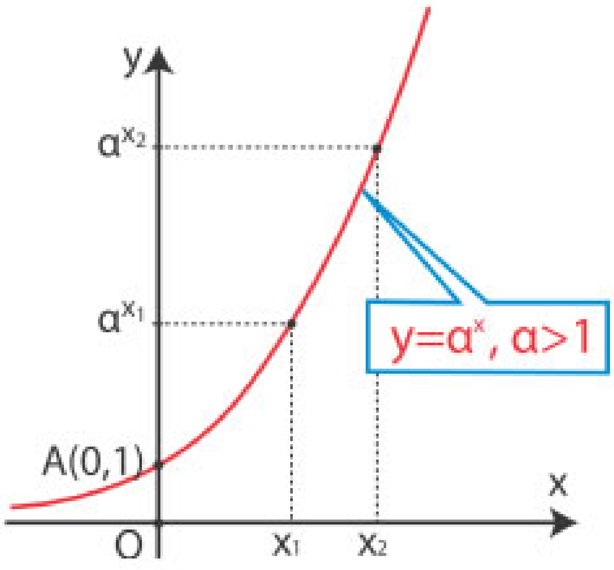
*ii.* Έχει σύνολο τιμών το διάστημα ......

..........................................................................................

*iii*. Είναι γνησίως ............ στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$$

*iv*. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο .........




• Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \alpha^x \qquad , \mu\epsilon\ \alpha < 1$$

*i*. Έχει πεδίο ορισμού το ...

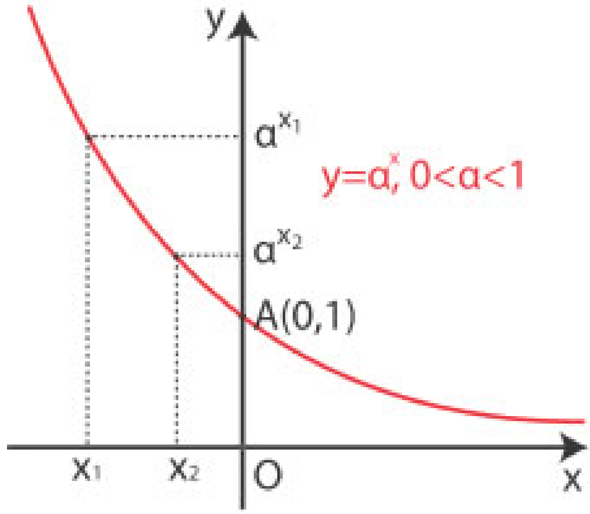
*ii*. Έχει σύνολο τιμών το διάστημα ......

*iii*. Είναι γνησίως ............ στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$$

*iv*. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο .........

...............................................................................................

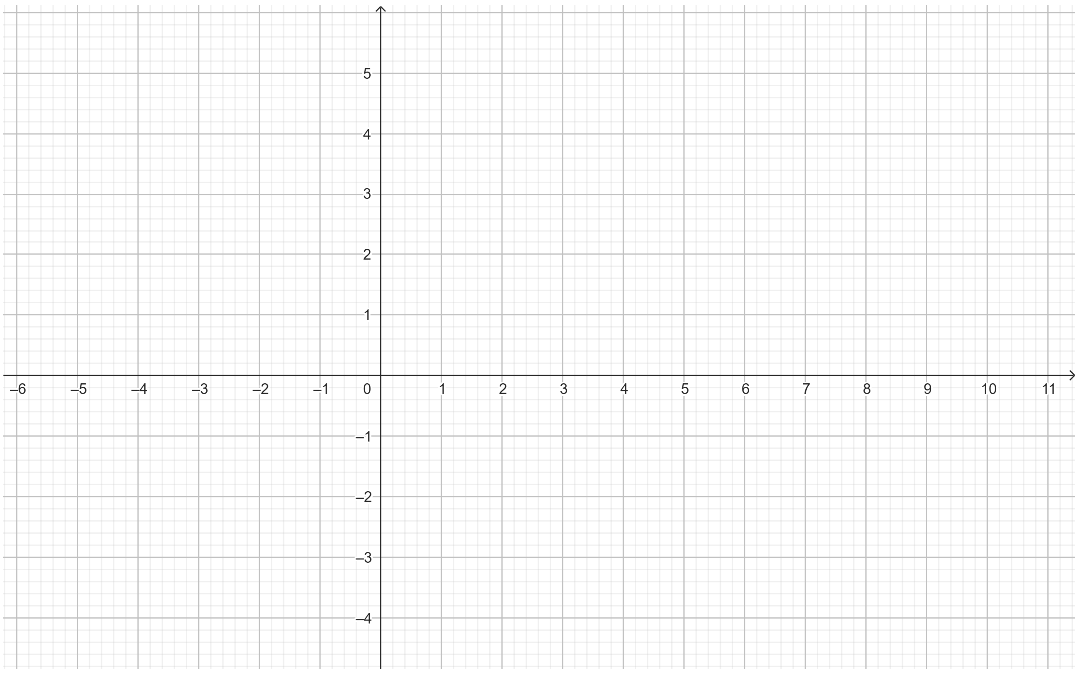



• Οι εκθετικές συναρτήσεις $f$ και $g$ που έχουν βάσεις $\alpha$ και $\dfrac{1}{\alpha}$ αντίστοιχα, έχουν γραφικές παραστάσεις που είναι μεταξύ τους συμμετρικές ως προς τον άξονα . . . . . .

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Σχεδίασε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις :**

$$\boldsymbol{f(x) = 2^x \text{ και } g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$$



• Ισχύει η ισοδυναμία : $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow \ldots\ldots = \ldots\ldots$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθούν οι εξισώσεις :**

$i.\ \mathbf{2^{3x} = \frac{1}{64}}$

ΛΥΣΗ

$ii.\ \mathbf{9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0}$

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί το σύστημα :**

$$\begin{cases} \mathbf{2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y} & \mathbf{= -22} \\ \mathbf{5 \cdot 3^x + \frac{1}{2} \cdot 2^y} & \mathbf{= \ 9} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθούν οι ανισώσεις :**

*i.* $\mathbf{3^{x^2-3x} > \frac{1}{9}}$

ΛΥΣΗ

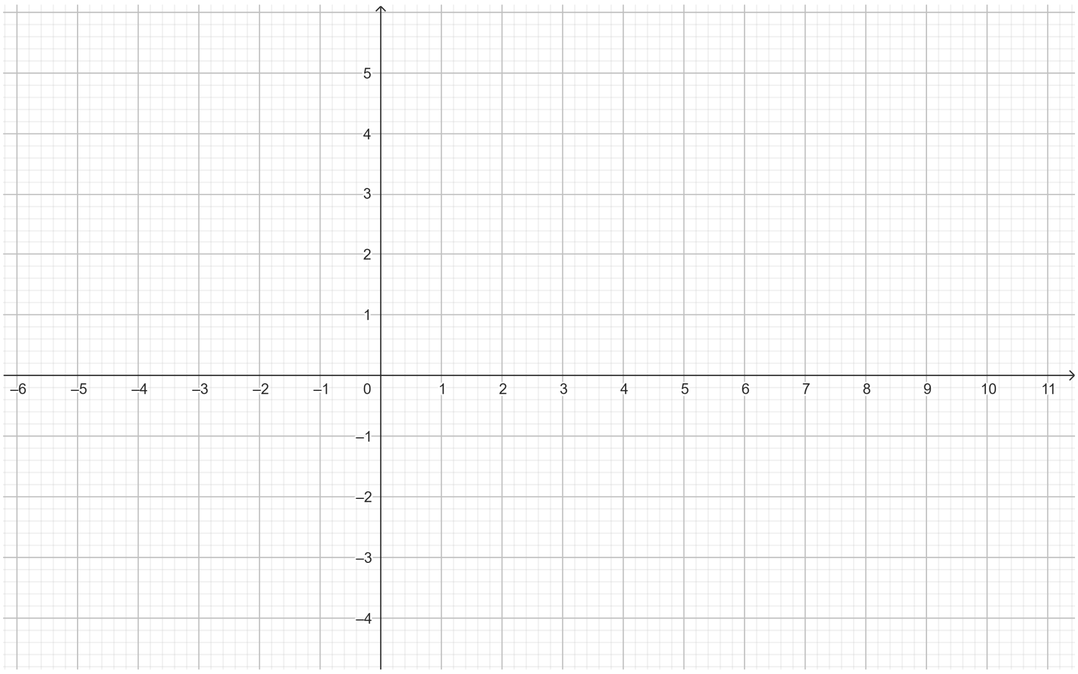
*ii.* $\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \frac{1}{4}}$

ΛΥΣΗ

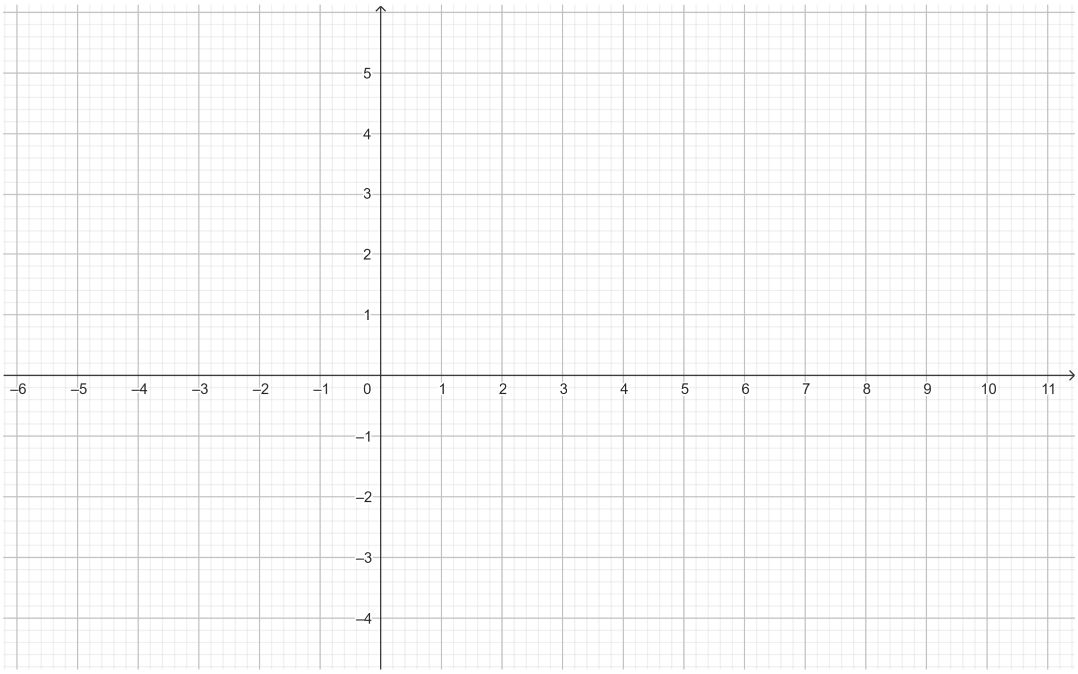
## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

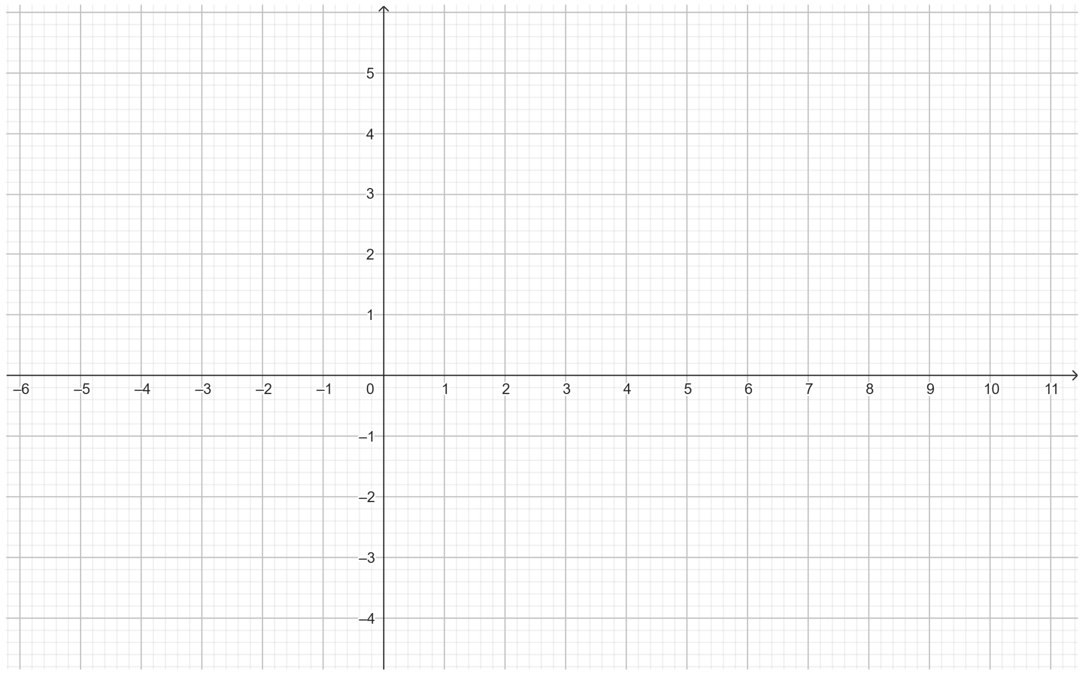
*i.* $f(x) = 2^x + 3$



*ii.* $f(x) = 2^{x-3}$



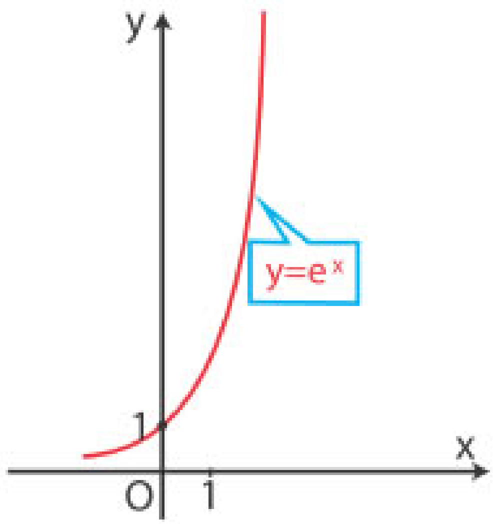
*iii.* $\boldsymbol{f(x) = 2^{x-3} + 2}$



**Ο αριθμός e**

• Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος. Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στο μεγάλο Ελβετό, μαθηματικό Leohard Euler. Ο αριθμός $e$ με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων είναι $e = 2,71828$.

• Σε πολλές πραγματικές εφαρμογές εμφανίζονται εκθετικές συναρτήσεις με βάση τον αριθμό $e$. Η απλούστερη τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = e^x$.



**Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής**

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$$

• Το $Q_0$ είναι η αρχική τιμή του $Q$ για $t = 0$ και είναι $Q_0 > 0$ , ενώ το $c$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή.

• Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής**.

✦ Αν $c > 0$ η συνάρτηση $Q$ είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της εκθετικής αύξησης.

✦ Αν $c < 0$ η συνάρτηση $Q$ είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της εκθετικής απόσβεσης.

• Ο χρόνος που χρειάζεται για να διασπασθεί ή να εξαφανισθεί η μισή ποσότητα μιας ραδιενεργού ουσίας λέγεται **ημιζωή ή χρόνος υποδιπλασιασμού** της ραδιενεργού ουσίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 5 χρόνια, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού είναι:**

$$\boldsymbol{Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5}}}$$

ΛΥΣΗ

## 5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

• Η λύση της εξίσωσης $\alpha^x = \theta$ συμβολίζεται με $\log_\alpha \theta$ και διαβάζεται ως λογάριθμος του $\theta$ με βάση $\alpha$.
Άρα

$$\boxed{\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta}$$

• Ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον $\alpha$ για να βρούμε το $\theta$.

### Ορισμοί και ιδιότητες λογαρίθμων

Πίνακας 5.3: Ορισμοί λογαρίθμων

| | |
|---|---|
| $\log_\alpha \alpha^x$ | $=$ |
| $\alpha^{\log_\alpha \theta}$ | $=$ |
| $\log_\alpha 1$ | $=$ |
| $\log_\alpha \alpha$ | $=$ |

### ιδιότητες λογαρίθμων

Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$i.$ $\log_\alpha \theta_1\theta_2 = \log_\alpha \theta_1 + \ldots\ldots$

$ii.$ $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \ldots\ldots$

$iii.$ $\log_\alpha \theta^k = \ldots\ldots\ldots\ldots$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$i.$

$ii.$

$iii.$

• Ισχύει για κάθε $\theta > 0$

$$\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \log_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \ldots\ldots$$

**Δεκαδικοί λογάριθμοι**

• Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού $\theta$, είναι λογάριθμος με βάση το ......, συμβολίζεται απλά με $\log\theta$ και **όχι** με $\log_\alpha \theta$.

Άρα:

$$\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \ldots$$

**Φυσικοί λογάριθμοι**

• Ο φυσικός ή νεπέριος λογάριθμος ενός θετικού αριθμού $\theta$, είναι λογάριθμος με βάση το ......, συμβολίζεται απλά με $\ln\theta$ και **όχι** με $\log_e \theta$.

Άρα:

$$\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \ldots$$

**Αλλαγή βάσης**

- Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha, \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει :

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\ldots\ldots}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Σύμφωνα με την κλίμακα *Richter* το μέγεθος $R$ ενός σεισμού εντάσεως $I$ δίνεται από τον τύπο**

$$R = \log\frac{I}{I_0}$$

**όπου $I_0$ μια ορισμένη ελάχιστη ένταση.**

*i.* **Να βρεθεί το μέγεθος $R$ ενός σεισμού που έχει ένταση $I = 1000 I_0$**

*ii.* **Να εκφρασθεί το $I$ ως συνάρτηση του $R$ και του $I_0$**

*iii.* **Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση ενός σεισμού από την ένταση ενός άλλου σεισμού που είναι μικρότερος κατά 1 μονάδα *Richter*;**

ΛΥΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Αν η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση του φωσφόρου $P^{32}$ είναι $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,0495t}$, όπου $t$ ο χρόνος σε ημέρες, να βρεθεί η ημιζωή του φωσφόρου $P^{32}$.**

ΛΥΣΗ

Αν $t$ είναι η ζητούμενη ημιζωή, τότε θα είναι $N(t) = \dfrac{N_0}{2} \Leftrightarrow$

## 5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

• Έστω $\alpha$ ένας θετικός αριθμός με $\alpha \neq 1$. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στον $\log_\alpha x$, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ldots\ldots$$

η οποία λέγεται .................. συνάρτηση με βάση .......

• Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \log_\alpha x \qquad , \mu\epsilon\ \alpha > 1$$

*i.* Έχει πεδίο ορισμού το ...

*ii.* Έχει σύνολο τιμών το διάστημα ......

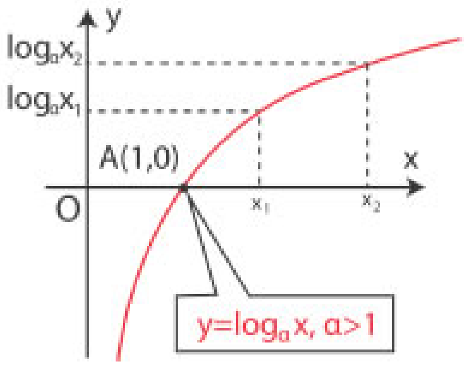
*iii.* Είναι γνησίως ............ στο $(0, +\infty)$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in$ ............ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$$

*iv.* Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο .........

*v.* Ισχύουν: $\log_\alpha x < 0$, αν $0 < x < 1$ και $\log_\alpha x > 0$, αν ......

..........................................................................................




• Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \log_\alpha x \qquad , \mu\epsilon \; 0 < \alpha < 1$$

*i*. Έχει πεδίο ορισμού το ...

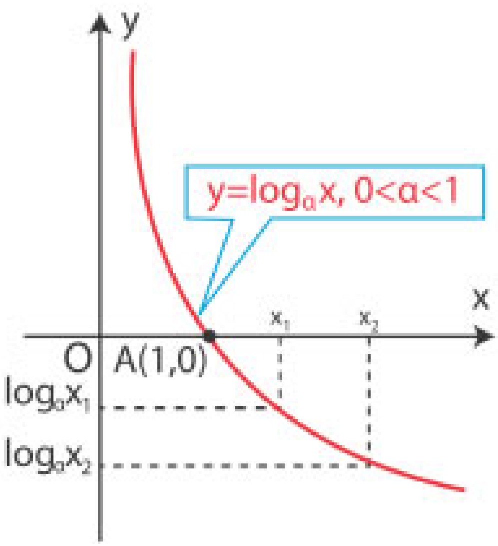
*ii*. Έχει σύνολο τιμών το διάστημα ......

*iii*. Είναι γνησίως ............ στο $(0, +\infty)$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in$ ............ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$$

*iv*. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο .........

*v*. Ισχύουν: $\log_\alpha x > 0$, αν $0 < x < 1$ και $\log_\alpha x < 0$, αν ......

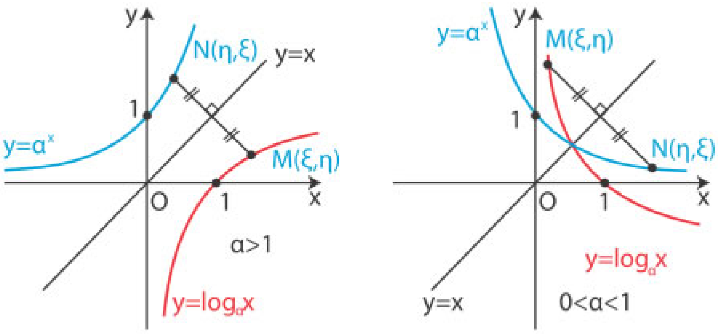



• Ισχύει:

$$\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow \ldots = \ldots$$

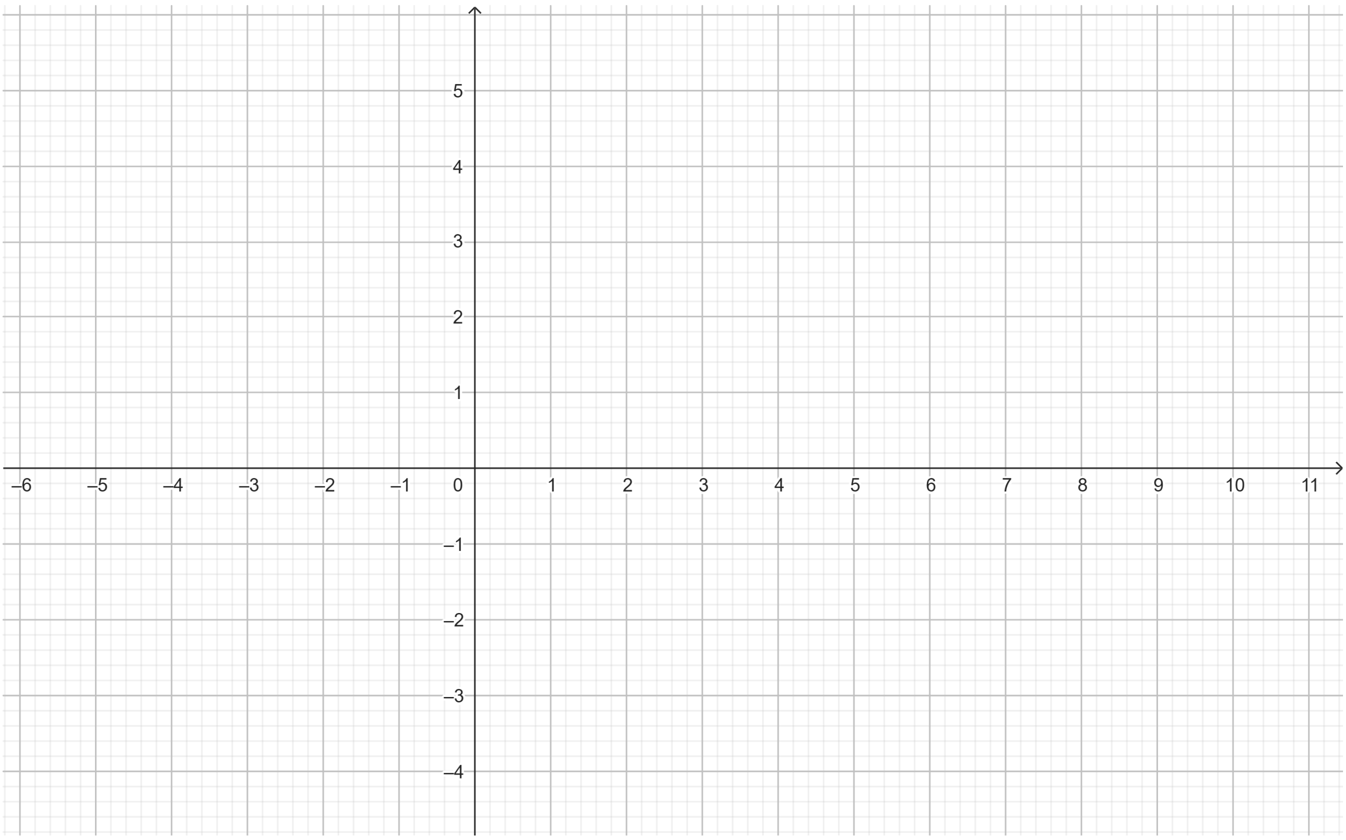
..........................................................................................

• Κάθε ζεύγος λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων που έχουν **την ίδια βάση**, έχουν επίσης γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$




ΕΦΑΡΜΟΓΗ **Σχεδίασε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις :**

$$\boldsymbol{f(x) = \ln x \text{ και } g(x) = \ln x + 1 \text{ και } h(x) = \ln(x-2)}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

**Να λυθεί η εξίσωση :**

$$\log_2(x^2 - x) = 1 + \log_2(x - 1)$$

ΛΥΣΗ